Matemática Ensino Médio

Anotações de aula

Trigonometira

Prof. José Carlos Ferreira da Silva

2016

ÍNDICE

Trigonometria

Apresentação

Este trabalho são apenas anotações de aula de Trigonometria para o Ensino Médio que têm como objetivo facilitar o aprendizado dos nossos alunos e em especial para aqueles que precisem de faltar às aulas.

É resultado de uma pesquisa que visa tornar a Matemática mais simples, priorizando o entendimento dos assuntos de maneira clara e a resolução de exercícios numa escala de dificuldades crescentes.

Bons estudos para todos.

Prof. José Carlos.

(blog: josecarlosfs.wordpress.com)

Referências bibliográficas:

PAIVA, M. *Matemática*. Matemática, São Paulo: Moderna, 2012, v. 3.

BIANCHINI. E.e E PACCOLA, H., Matemática. São Paulo: Moderna, 2004, v 3

RIBEIRO, J. Matemática. São Paulo: Scipione, 2011, v. 3.

SOUZA, J. Matemática. São Paulo: FTD, 2010, (coleção Novo Olhar v. 2.)

LEONARDO, F. M. Conexões com a Matemática. São Paulo: Moderna, 2013, v. 3.

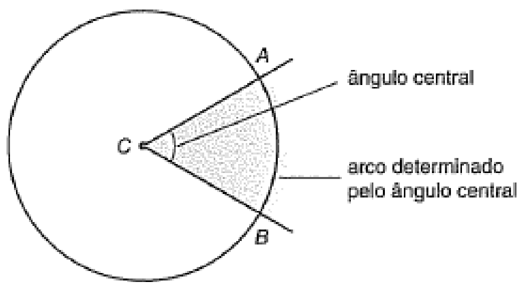
1 - INTRODUÇÃO

Esta apostila visa preparar os alunos do 2º ano para o PISM, dentro da proposta do conteúdo de RPM no colégio Marco Polo.

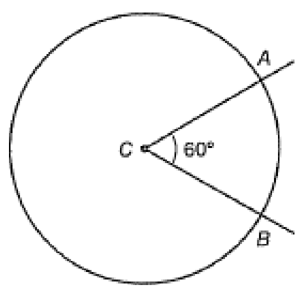
2 – Ângulos na circunferência

2.1 – ÂNGULO CENTRAL

Todo ângulo cujo vértice é o centro de uma circunferência é chamado de **ângulo central** dessa circunferência.



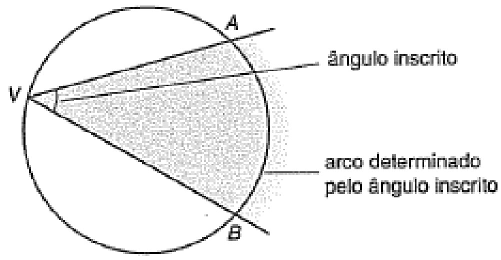
Define-se a medida, em grau, de um arco de circunferência como a medida do ângulo central que o determina. Por exemplo:



$$m(A\hat{C}B) = 60° \Leftrightarrow m(\widehat{AB}) = 60°$$

2.2 – ÂNGULO INSCRITO EM UMA CIRCUNFERÊNCIA

Todo ângulo cujo vértice pertence a uma circunferência e os lados são secantes a ela é chamado de **ângulo inscrito** nessa circunferência.



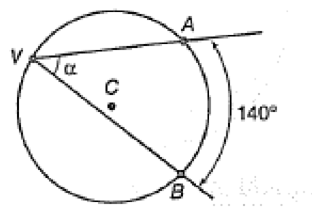
Um ângulo inscrito e um ângulo central que determinam o mesmo arco são chamados de **ângulos correspondentes** nessa circunferência.

Propriedade

A medida de um ângulo inscrito é metade da medida do ângulo central correspondente.

Exemplo

Na figura abaixo, a medida do ângulo central $A\hat{C}B$ é igual à medida do arco que ele determina na circunferência, isto é, 140°. Como a medida α do ângulo inscrito é metade da medida do ângulo central correspondente, concluímos que: $\alpha = \dfrac{140°}{2} \Rightarrow \alpha = 70°$



2.3 – RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

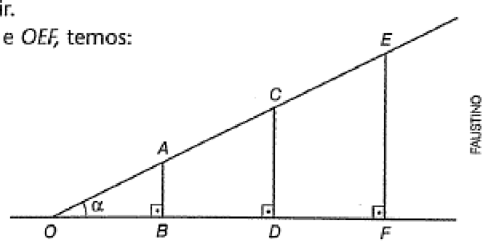
Todos os triângulos retângulos que têm um ângulo agudo de medida α são semelhantes entre si. Veja alguns desses triângulos na figura a seguir.

Da semelhança entre os triângulos *OAB*, *OCD* e *OEF*, temos:

$$\frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = r_1$$

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = r_2$$

$$\frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = r_3$$

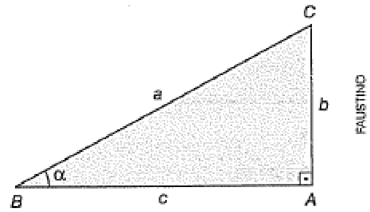


As constantes r_1, r_2 e r_3 são **razões trigonométricas** chamadas, respectivamente, de **seno** de α (sen α), **cosseno** de α (cos α) e **tangente** de α (tg α).

Dois triângulos são semelhantes quando os três ângulos internos de um deles são, respectivamente, congruentes aos três ângulos internos do outro. Em consequência, as medidas dos lados de um desses triângulos são proporcionais às medidas dos lados do outro.

Quando dizemos "cateto oposto a α", estamos nos referindo ao "cateto oposto ao ângulo de medida α". E o mesmo vale para o "cateto adjacente a α".

Como essas razões são as mesmas para todos os triângulos retângulos semelhantes entre si, podemos defini-las a partir de apenas um deles. Veja:

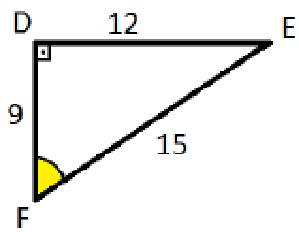


$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{b}{c}$$

1)Calcule as razões seno, cosseno e tangente do ângulo F do triângulo DEF abaixo.

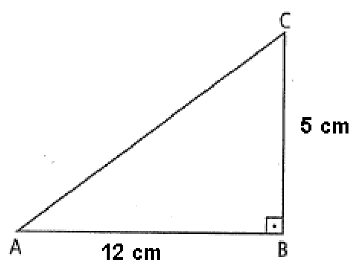


2) No triângulo retângulo da figura, calcule os valores de:

a) sen C

b) cos C

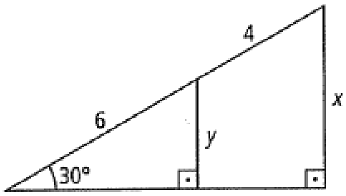
c) tg A



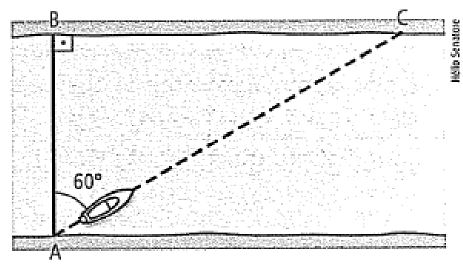
3) Calcule x e y.

$\text{sen } 30° = \frac{y}{6} \Rightarrow y = 3$

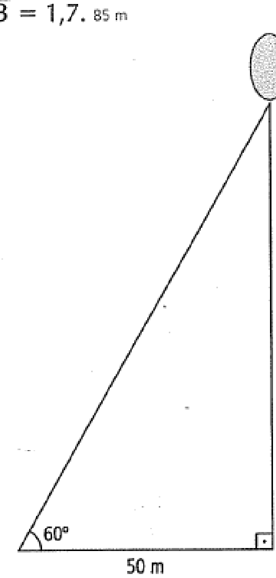
$\text{sen } 30° = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 5$



4) (Unama-PA) A figura abaixo representa um barco atravessando um rio, partindo de A em direção ao ponto B. A forte correnteza arrasta o barco em direção ao ponto C, segundo um ângulo de 60°. Sendo a largura do rio de 120 m, qual é a distância percorrida pelo barco até o ponto C? 240 m • $\cos 60° = \frac{120}{AC}$



5) Calcule a altura do balão de gás, considerando $\sqrt{3} = 1{,}7$. 85 m



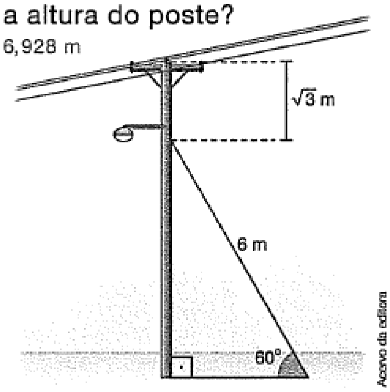
$\text{tg } 60° = \frac{h}{50}$

$\sqrt{3} = \frac{h}{50}$

$1{,}7 = \frac{h}{50} \Rightarrow h = 85$

6) Para auxiliar na sustentação de um poste, foi fixado um cabo de aço de 6 m de comprimento formando um ângulo de 60° com o solo, conforme mostra a figura. Qual a altura do poste?

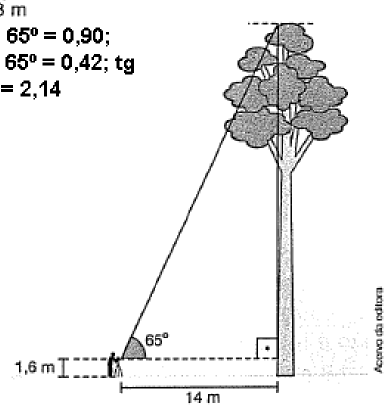
$4\sqrt{3}$ m ou 6,928 m



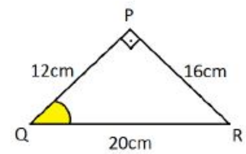
7) Para calcular a altura de uma árvore, Marcelo construiu o esquema a seguir com o auxílio de um teodolito. Qual é a altura aproximada dessa árvore?

31,63 m

sen 65º = 0,90; cos 65º = 0,42; tg 65° = 2,14



1) Considere o triângulo ao lado e responda as seguintes questões:



a) Calcule o seno, do ângulo Q.

b) Calcule o cosseno do ângulo Q.

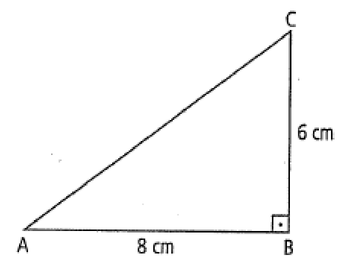
c) Calcule a tangente do ângulo Q.

2) No triângulo retângulo da figura, calcule os valores de:

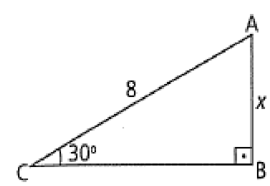
a) sen $\hat{A}$

b) cos $\hat{A}$

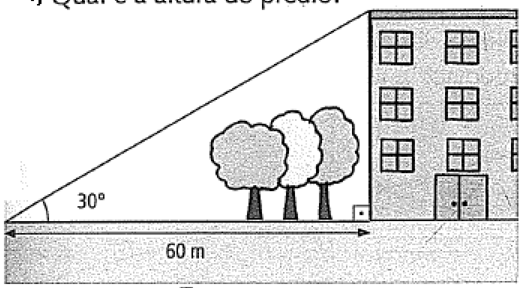
c) tg $\hat{C}$



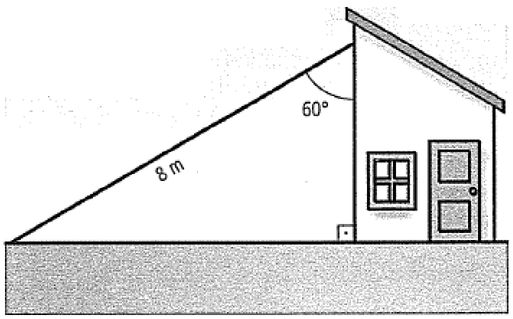
3) Calcule o valor de x em cada um dos triângulos retângulos.



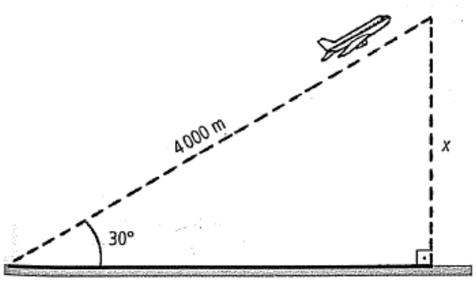
4) Qual é a altura do prédio?



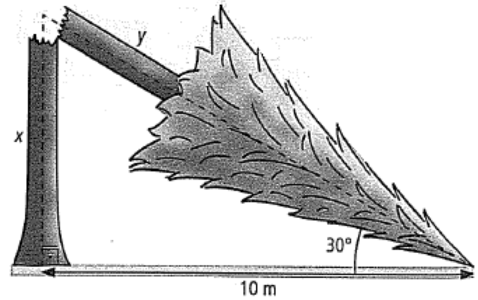
5) Uma escada de 8 m é encostada em uma parede, formando com ela um ângulo de 60°. A que altura da parede a escada se apoia?



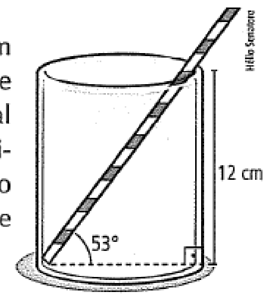
6) Um avião levanta voo sob um ângulo de 30° em relação à pista. Qual será a altura do avião quando este percorrer 4 000 m em linha reta?



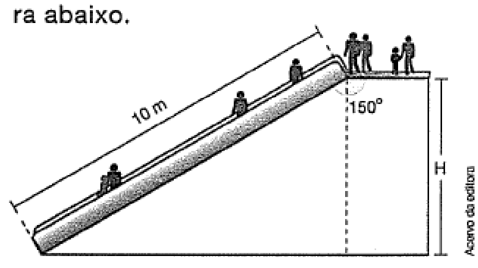
7) Qual era a altura deste pinheiro? (Considere $\sqrt{3} = 1{,}7$.)



8) Um copo tem 12 cm de altura e dentro dele há um canudinho. Qual é o comprimento aproximado desse canudinho sabendo que 6 cm deles estão fora do copo?
(sen 53° = 0,8; cos 53° = 0,6 e tg 53° = 1,32)



9) Em um *shopping*, uma pessoa sai do primeiro pavimento para o segundo através de uma escada rolante, conforme a figura abaixo.



A altura H, em metros, atingida pela pessoa, ao chegar ao segundo pavimento, é:

a) 15 b) 10 c) 5 d) 3 e) 2

2.4 – ÂNGULOS NOTÁVEIS

Para estudos posteriores de Trigonometria, convém conhecermos o seno, o cosseno e a tangente de alguns ângulos. Escolhemos, pela facilidade das demonstrações, os ângulos de medidas 30°, 45° e 60°, que chamaremos de **ângulos notáveis**.

Ângulo de 45°

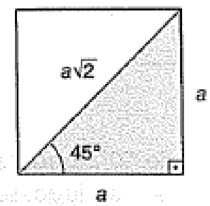
Vimos que a medida de cada diagonal de um quadrado de lado a é $a\sqrt{2}$, e cada ângulo interno do quadrado é dividido, pela diagonal, em dois ângulos de 45°.

Assim, temos:

$$\text{sen } 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{a}{a} = 1$$



Ângulos de 30° e 60°

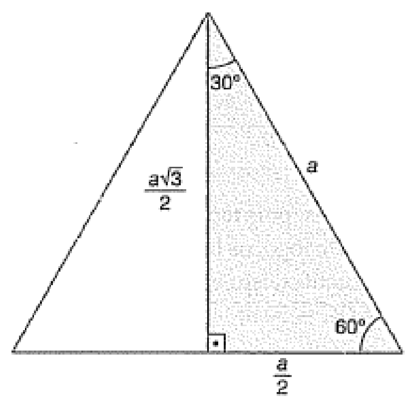
Conforme já estudamos, a medida de cada altura de um triângulo equilátero de lado a é $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vimos que cada altura desse tipo de triângulo também é bissetriz interna e mediana.

Como cada ângulo interno do triângulo equilátero mede 60°, temos:

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{a}{\cancel{2}}}{\frac{a\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Temos, ainda, que 60° é o complemento de 30°. Logo:

$$\text{sen } 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{\text{sen } 60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Podemos então montar a seguinte tabela com os valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis:

Tabela trigonométrica dos ângulos notáveis			
	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

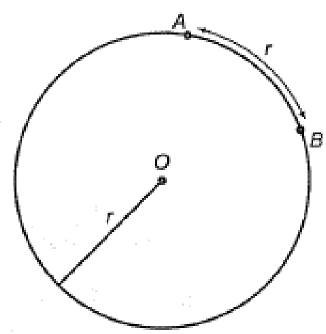
3 – CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

3.1 –O RADIANO, UNIDADE DE MEDIDA DE ARCO E DE ÂNGULO

No estudo da Geometria plana é comum a utilização do **grau** como unidade de medida de ângulo e de arco de circunferência. Neste capítulo, estudaremos outra unidade para medir arco e ângulo: o **radiano**, definido a seguir.

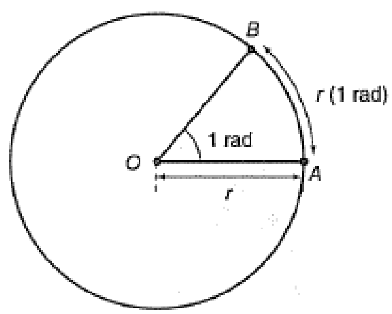
Consideremos um arco $\widehat{AB}$, contido numa circunferência de raio r, tal que o comprimento do arco $\widehat{AB}$ seja igual a r.

Dizemos que a medida do arco $\widehat{AB}$ é 1 radiano (1 rad).



Um radiano (1 rad) é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao do raio da circunferência que o contém.

Um ângulo $A\hat{O}B$ mede 1 rad se, e somente se, determinar numa circunferência de centro O um arco de 1 rad.



3.1.1 – A MEDIDA DA CIRCUNFERÊNCIA EM RADIANO

Sabemos que uma circunferência mede 360°. Qual é a sua medida em radiano?

Para responder a essa pergunta, consideremos uma circunferência cujo raio tenha medida r. Como o comprimento dessa circunferência é $2\pi r$, podemos obter a sua medida x, em radiano, por meio de uma regra de três:

Medida do arco (rad)		Comprimento do arco
1	——	r
x	——	$2\pi r$

Logo: $x = \dfrac{2\pi r}{r}$ rad $= 2\pi$ rad

Assim, concluímos:

A medida de uma circunferência é 2π rad.

3.1.2 – TRANSFORMAÇÕES DE UNIDADES

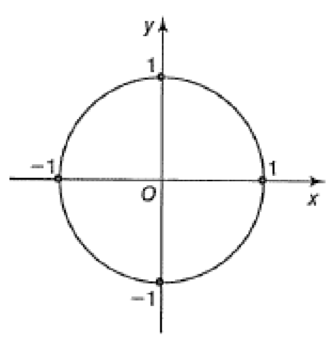
Dizemos que uma medida em radiano é equivalente a uma medida em grau se ambas forem medidas de um mesmo arco; por exemplo, 2π rad é equivalente a 360°, pois são medidas de um arco de uma volta completa. Consequentemente, temos:

π rad é equivalente a 180°

Essa equivalência nos permite transformar unidades, ou seja, dada a medida de um arco em grau, podemos obter a medida desse arco em radiano e vice-versa.

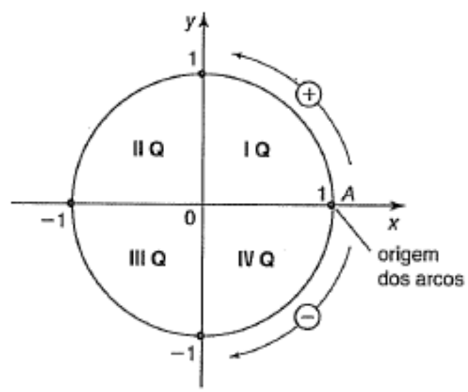
3.2 – CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Vamos considerar uma circunferência de raio r unitário ($r = 1$) cujo centro O coincida com a origem de um sistema cartesiano ortogonal.



Essa estrutura, com as convenções a seguir, constitui a **circunferência trigonométrica**.

- O ponto $A(1, 0)$ é a **origem** de todos os arcos a serem medidos na circunferência.
- Se um arco for medido no sentido **horário**, então a essa medida será atribuído o sinal **negativo** ($-$).
- Se um arco for medido no sentido **anti-horário**, então a essa medida será atribuído o sinal **positivo** ($+$).
- Os eixos coordenados dividem o plano cartesiano em quatro regiões, chamadas **quadrantes** (Q) e numeradas no sentido anti-horário, a partir do ponto A, conforme a figura:

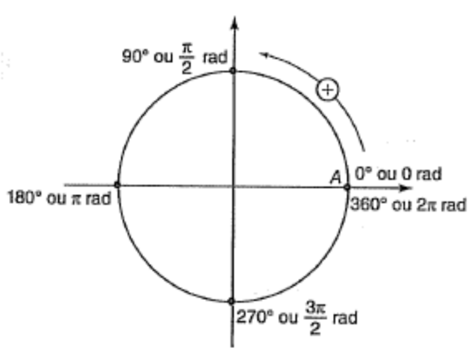


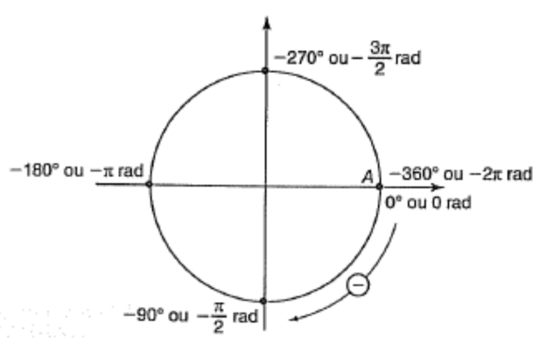
- Os pontos dos eixos coordenados não pertencem a nenhum dos quadrantes.

3.2.1 – ARCOS TRIGONOMÉTRICOS

Aos pontos da circunferência trigonométrica associamos medidas em grau ou em radiano. Cada medida associada a um ponto M indica a medida do arco $\widehat{AM}$.

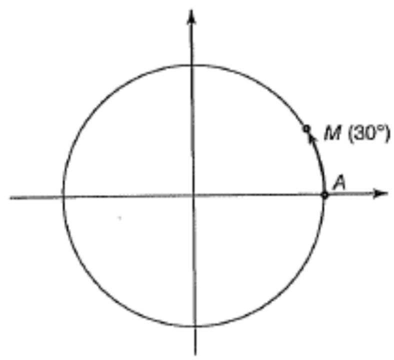
Exemplos





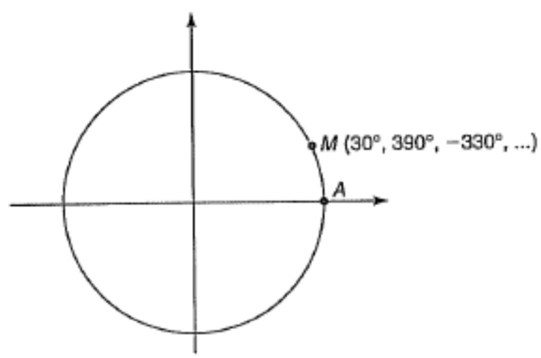
3.2.2 – ARCOS CÔNGRUOS

Girando 30°, no sentido anti-horário, a partir do ponto *A* da circunferência trigonométrica abaixo, paramos no ponto *M*; logo, 30° é uma medida associada ao ponto *M*.



Há, porém, infinitas outras medidas associadas ao ponto *M*. Por exemplo:

- Girando uma volta completa mais 30°, no sentido anti-horário, a partir do ponto *A*, também paramos no ponto *M*. Logo, 360° + 30°, isto é, 390° também é uma medida associada ao ponto *M*.
- Girando 330°, no sentido horário, a partir do ponto *A*, paramos no ponto *M*. Logo, −330° também é uma medida associada ao ponto *M*.

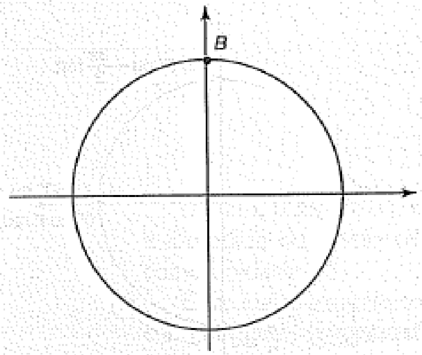


Arcos trigonométricos que têm a mesma extremidade são chamados de **arcos côngruos**.

Se α e β são medidas de arcos côngruos, indicamos: $\alpha \equiv \beta$ (lê-se: α é côngruo a β).
Assim, no exemplo anterior, temos: $30° \equiv 390° \equiv -330°$

Exemplo

Calcular as medidas x, em grau, associadas ao ponto B da circunferência trigonométrica abaixo, nas quatro primeiras voltas positivas ($0° \leq x < 1.440°$).



Resolução

A medida em grau associada ao ponto B na 1ª volta positiva é 90°. Assim, as outras medidas associadas ao ponto B são:

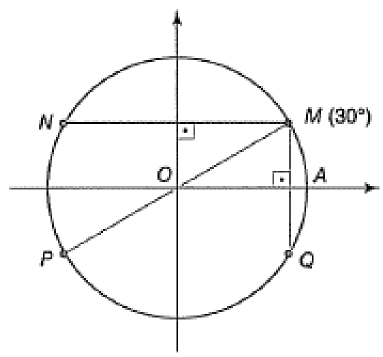
- na 2ª volta positiva: $90° + 360° = 450°$
- na 3ª volta positiva: $90° + 2 \cdot 360° = 810°$
- na 4ª volta positiva: $90° + 3 \cdot 360° = 1.170°$

Logo, as medidas dos arcos côngruos procuradas são: 90°, 450°, 810° e 1.170°.

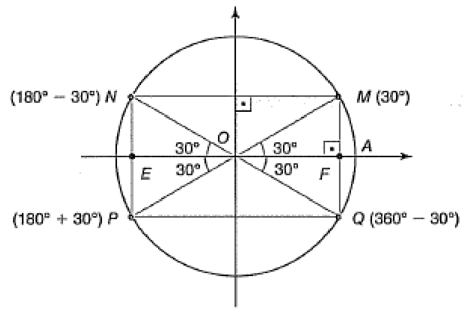
3.3 - SIMETRIAS

É de grande utilidade saber relacionar medidas de arcos trigonométricos com extremidades simétricas em relação a um dos eixos coordenados ou à origem do sistema cartesiano, pois isso ajudará, mais adiante, a calcular senos, cossenos, tangentes etc. desses arcos.

Consideremos, por exemplo, o ponto M, da circunferência trigonométrica abaixo, associado à medida 30°. Pelo ponto M, tracemos três retas: a perpendicular ao eixo das ordenadas, a que passa pela origem do sistema e a perpendicular ao eixo das abscissas. Essas retas interceptam a circunferência nos pontos N, P e Q, respectivamente.



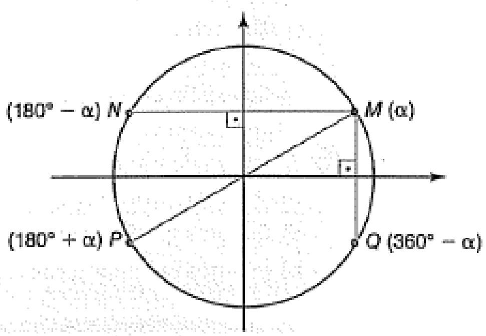
Os pontos N, P e Q são chamados de **simétricos** (ou correspondentes) do ponto M. Determinemos as medidas x (com $0° \leq x < 360°$) associadas a esses pontos:



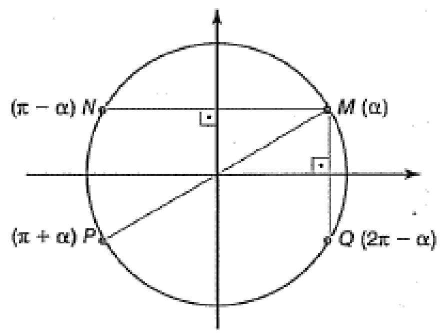
- Os ângulos $N\hat{O}E$ e $M\hat{O}F$ têm a mesma medida, pois os triângulos NOE e MOF são congruentes. Logo, o arco trigonométrico $\overset{\frown}{AN}$ mede $180° - 30°$, ou seja, 150°.
- Os ângulos $P\hat{O}E$ e $M\hat{O}F$ têm a mesma medida, pois são opostos pelo vértice. Logo, o arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP}$ mede $180° + 30°$, ou seja, 210°.
- Os ângulos $Q\hat{O}F$ e $M\hat{O}F$ têm a mesma medida, pois os triângulos QOF e MOF são congruentes. Logo, o arco trigonométrico $\overset{\frown}{AQ}$ mede $360° - 30°$, ou seja, 330°.

Generalizando esses resultados:

Sendo α uma medida em grau



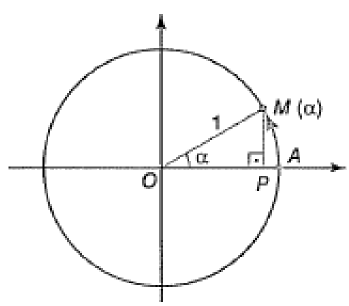
Sendo α uma medida em radiano



3.4 – SENO E COSSENO DE UM ARCO TRIGONOMÉTRICO

Com base na ideia de seno e cosseno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo, vamos estender o conceito de seno e cosseno para um arco trigonométrico.

Para entender a transição do triângulo retângulo para a circunferência trigonométrica, considere um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, com $0° < \alpha < 90°$.



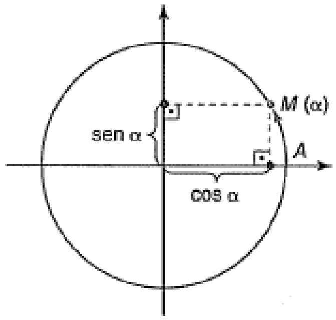
Como o raio da circunferência trigonométrica mede 1 e a medida do ângulo central $M\hat{O}A$ é igual à medida do arco $\overset{\frown}{AM}$, em grau, temos no triângulo retângulo OMP:

$$\cos \alpha = \frac{OP}{1} = OP$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{PM}{1} = PM$$

Portanto, cos α e sen α são, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto M.
Ampliamos esse conceito para qualquer arco trigonométrico pela definição a seguir.

Dado um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida α, chamam-se **cosseno** e **seno** de α a abscissa e a ordenada do ponto M, respectivamente.

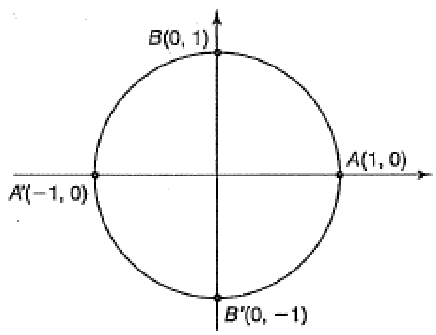


cos α = abscissa de M
sen α = ordenada de M

Assim, na circunferência trigonométrica, podemos nos referir ao eixo das abscissas como eixo dos cossenos e ao eixo das ordenadas como eixo dos senos.

Exemplo

Como o raio da circunferência trigonométrica é unitário (medida igual a 1), as coordenadas dos pontos A, B, A' e B' são:



Então, pela definição de cosseno e seno, temos:

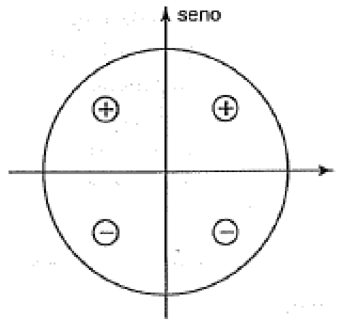
- cos 0° = 1
- cos 180° = −1
- cos 360° = 1
- sen 90° = 1
- sen 270° = −1
- cos 90° = 0
- cos 270° = 0
- sen 0° = 0
- sen 180° = 0
- sen 360° = 0

Observe que, como a circunferência trigonométrica tem raio unitário, temos para qualquer arco de medida x:

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$
$$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$$

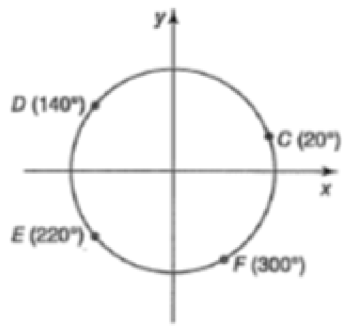
3.4.1 – VARIAÇÃO DO SINAL DO SENO

Vimos que o seno de um arco trigonométrico é a ordenada da extremidade desse arco. Como os pontos de ordenadas positivas são os do 1º e os do 2º quadrante e os pontos de ordenadas negativas são os do 3º e os do 4º quadrante, temos o seguinte esquema de sinais para o seno:



Exemplo

Os arcos trigonométricos de 20°, 140°, 220° e 300° têm extremidades nos pontos *C*, *D*, *E* e *F*, respectivamente, conforme mostra a figura:

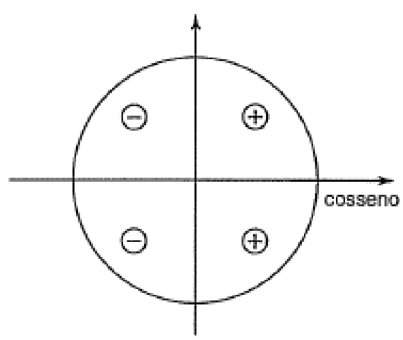


Observando que:

- *C* e *D* são pontos do 1º e do 2º quadrante e que sen 20° e sen 140° são as ordenadas desses pontos, respectivamente, temos sen 20° e sen 140° positivos;
- *E* e *F* são pontos do 3º e do 4º quadrante e que sen 220° e sen 300° são as ordenadas desses pontos, respectivamente, temos sen 220° e sen 300° negativos.

3.4.2 – VARIAÇÃO DO SINAL DO COSSENO

Vimos que o cosseno de um arco trigonométrico é a abscissa da extremidade desse arco. Como os pontos de abscissas positivas são os do 1º e os do 4º quadrante e os pontos de abscissas negativas são os do 2º e os do 3º quadrante, temos o seguinte esquema de sinais para o cosseno:



Exemplo

Na figura do exemplo anterior, observando que:

- *C* e *F* são pontos do 1º e do 4º quadrante e que cos 20° e cos 300° são as abscissas desses pontos, respectivamente, temos cos 20° e cos 300° positivos;
- *D* e *E* são pontos do 2º e do 3º quadrante e que cos 140° e cos 220° são as abscissas desses pontos, respectivamente, temos cos 140° e cos 220° negativos.

3.5 – REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

No estudo da Trigonometria no triângulo retângulo, deduzimos a tabela trigonométrica dos ângulos notáveis.

Devido à igualdade entre a medida do arco e a do ângulo central que determina esse arco na circunferência trigonométrica, se considerarmos 30°, 45° e 60° como medidas de arcos trigonométricos, os valores dessa tabela permanecem os mesmos.

	30° ou $\frac{\pi}{6}$	45° ou $\frac{\pi}{4}$	60° ou $\frac{\pi}{3}$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

O objetivo do estudo deste tópico é relacionar o seno e o cosseno de um arco do 2º, do 3º ou do 4º quadrante com o seno e o cosseno do arco correspondente no 1º quadrante. Para exemplificar, utilizaremos a tabela dos arcos notáveis.

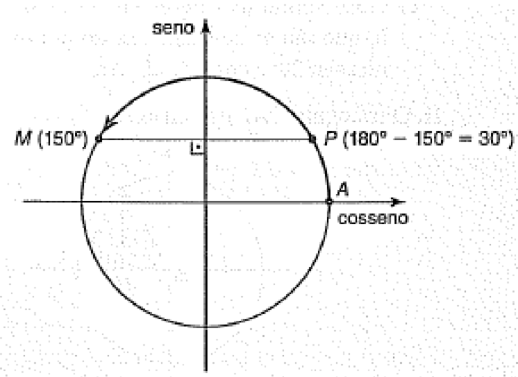
Observe que ela apresenta senos e cossenos de alguns arcos do 1º quadrante. Vejamos como usar essa tabela nos demais quadrantes acompanhando os exercícios resolvidos a seguir.

Exemplo:

Usando a tabela dos arcos notáveis, calcular sen 150° e cos 150°.

Resolução

A extremidade *M* do arco de 150° pertence ao 2º quadrante. Traçando por *M* a perpendicular ao eixo dos senos, obtemos o ponto *P*, correspondente de *M* no 1º quadrante, conforme a figura ao lado.



Os pontos *M* e *P* têm ordenadas iguais e abscissas opostas. Logo:

$$\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2} \text{ e } \cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3.6 – RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA

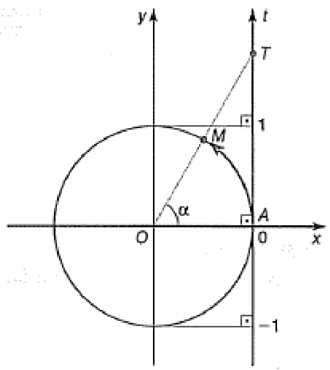
Dado um arco trigonométrico de medida α, temos:

$$\boxed{\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Vamos demonstrar apenas o caso em que a extremidade do arco de medida α é um ponto do 1º quadrante; porém, é importante ressaltar que a relação continua verdadeira mesmo que essa extremidade não esteja no 1º quadrante.

4 – TANGENTE DE UM ARCO TRIGONOMÉTRICO

Assim como fizemos para o seno e o cosseno, no capítulo anterior, vamos estender o conceito de **tangente** para um arco trigonométrico tomando por base a ideia de tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo. Para compreender essa extensão, considere o arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, com $0° < \alpha < 90°$, e o eixo real t de origem A, com a mesma direção e a mesma orientação do eixo Oy, conforme mostra a figura abaixo. Para determinar a tangente do arco $\overset{\frown}{AM}$, traçamos a reta $\overline{OM}$ até sua intersecção T com o eixo t.

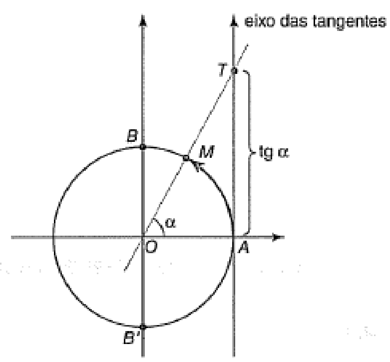


No triângulo retângulo AOT, temos:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$$

A tangente de α é a medida do segmento de reta $\overline{AT}$ contido no eixo real t, que será chamado, de agora em diante, de **eixo das tangentes**. Ampliando essa ideia, vamos definir a tangente para qualquer arco trigonométrico.

Dado um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, com M não pertencente ao eixo das ordenadas, chama-se **tangente de α** a ordenada do ponto T, que é a intersecção da reta $\overline{OM}$ com o eixo das tangentes.



Note que a tangente pode assumir qualquer valor real.

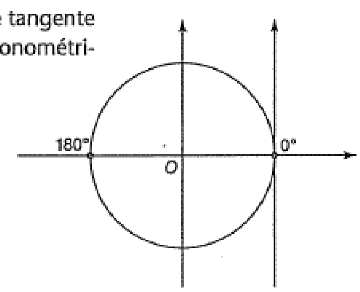
Observe que o ponto M não pode coincidir com B nem com B', pois os prolongamentos dos raios $\overline{OB}$ e $\overline{OB'}$ não interceptam o eixo das tangentes. Por isso dizemos que **não existe** tangente de um arco com extremidade em B ou em B'; ou seja, na 1ª volta da circunferência trigonométrica, não existe tg 90° nem tg 270°.

Exemplo

Para determinar tg 0° e tg 180°, marcamos na circunferência trigonométrica os pontos associados a 0° e a 180°, conforme a figura ao lado.

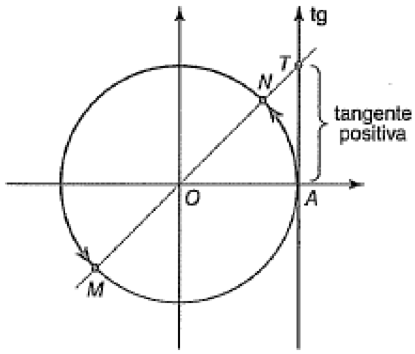
Como as retas que passam por esses pontos e pelo centro da circunferência interceptam o eixo das tangentes no ponto de ordenada zero, concluímos:

$$\text{tg}\ 0° = 0 \text{ e tg}\ 180° = 0$$

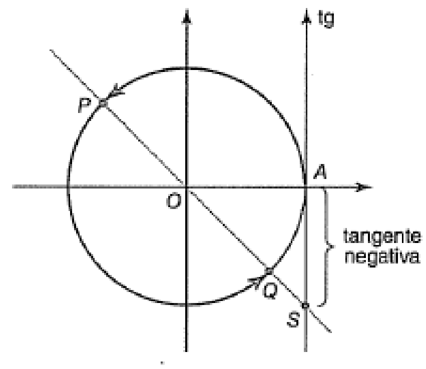


4.1 – VARIAÇÃO DO SINAL DA TANGENTE

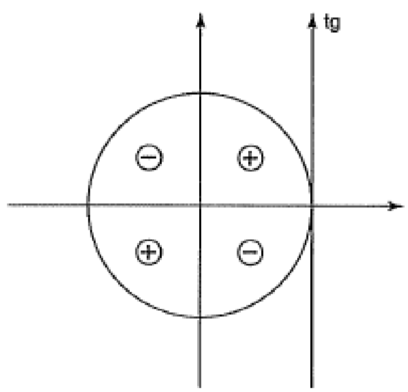
Se um arco trigonométrico tiver a extremidade no 1º ou no 3º quadrante, o prolongamento do raio que passa por essa extremidade interceptará o eixo das tangentes em um ponto T de ordenada positiva.



Se um arco trigonométrico tiver a extremidade no 2º ou no 4º quadrante, o prolongamento do raio que passa por essa extremidade interceptará o eixo das tangentes em um ponto S de ordenada negativa.



Ou seja, a tangente é positiva para os arcos do 1º e do 3º quadrante e negativa para os arcos do 2º e do 4º quadrante. Em resumo, essa variação de sinal pode ser assim representada:



4.2 – A TANGENTE COMO RAZÃO DO SENO PELO COSSENO

No estudo do triângulo retângulo, vimos que a tangente de um ângulo agudo pode ser obtida pela razão do seno pelo cosseno desse ângulo. É possível generalizar esse fato para a tangente de qualquer arco trigonométrico de medida α, com $\cos \alpha \neq 0$.

> Se um arco trigonométrico tem medida α, com $\cos \alpha \neq 0$, então: $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$

4.3 – REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

O fato de a medida de um arco trigonométrico ter a mesma medida do ângulo central correspondente garante que a tangente de um arco trigonométrico seja igual à tangente do ângulo central correspondente. Como consequência, a tabela trigonométrica dos ângulos notáveis continua válida para arcos trigonométricos. Assim, acrescentando os valores da tangente à tabela trigonométrica dos arcos notáveis, temos:

	30° ou $\frac{\pi}{6}$	45° ou $\frac{\pi}{4}$	60° ou $\frac{\pi}{3}$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Conhecida a tangente de um arco trigonométrico do 1º quadrante, podemos calcular a tangente do correspondente desse arco em qualquer quadrante, conforme veremos no exercício resolvido a seguir.

Exemplo

Consultando a tabela trigonométrica dos arcos notáveis, determinar o valor de:

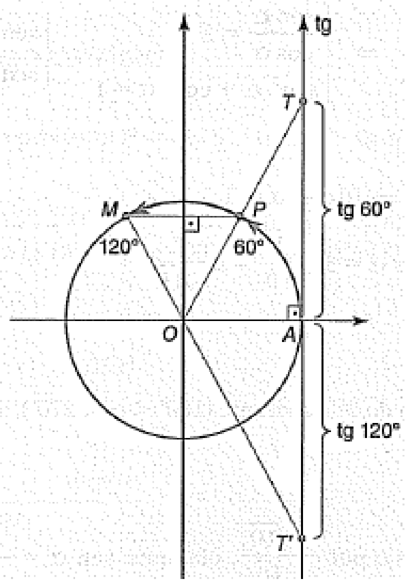
a) tg 120°

b) tg $\frac{7\pi}{6}$

c) tg 300°

Resolução

a) O correspondente, no 1º quadrante, da extremidade M do arco de 120° é o ponto P, extremidade do arco de 60°.
Como os triângulos OTA e $OT'A$ da figura são congruentes, os pontos T e T' têm ordenadas opostas. Assim, concluímos:
tg 120° = −tg 60° = $-\sqrt{3}$



4.4 – EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Retomando a situação da página de abertura, observe o esquema ao lado.

A medida α do ângulo agudo de inclinação da escada é tal que:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{10}{10} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = 1$$

Como α é a medida de um ângulo agudo, concluímos que $\alpha = 45°$.

Note que, ao determinar um valor de α, obtivemos uma solução da equação tg $\alpha = 1$.

> Equações do tipo tg $x = k$, sendo k uma constante real, são chamadas de **equações trigonométricas imediatas**.

Exercícios

1) Converta 30° em radianos.

2) Converta 80° em radianos.

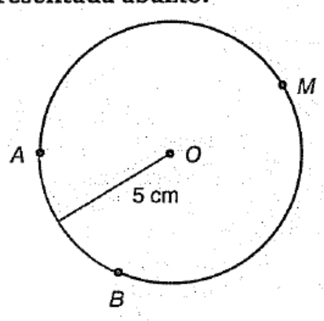
3) Converta 150° em radianos.

4) Converta em graus $\frac{\pi}{9}$ rad.

5) Converta em graus $\frac{4\pi}{3}$ rad.

6) Converta em graus $\frac{8\pi}{9}$ rad.

7) **Determinar a medida, em radiano, do arco $\widehat{AMB}$, de 20 cm, contido na circunferência de raio 5 cm, representada abaixo.**



8) Determinar a medida, em radiano, equivalente a 70°.

9) Determine a medida , em radiano, equivalente a 160°.

10) Quando um relógio marca 17h, qual é a medida do menor ângulo formado entre os ponteiros das horas e dos minutos em graus e em radianos?

11) Em uma ciclo trigonométrico, represente a extremidade dos seguintes arcos:

a) 30°

b)150°

c) 240°

d) 330°

e) -240°

f) -180°

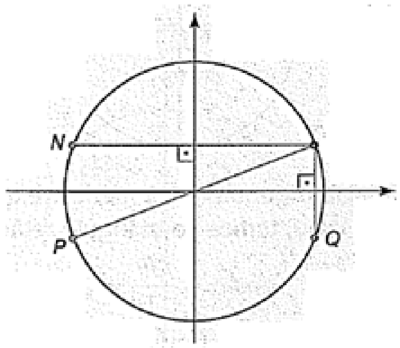
12) Em uma ciclo trigonométrico, represente a extremidade dos seguintes arcos:

a) $\frac{4\pi}{3}\ rad$

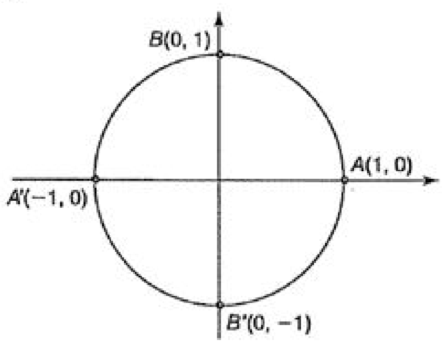
b) $\frac{7\pi}{6}\ rad$

c)$-\ \frac{7\pi}{6}\ rad$

13) O ponto M, da circunferência trigonométrica abaixo, está associado à medida **36°?**
Calcule as medidas x (com $0 \leq x < 2\pi$) associadas aos pontos N, P e Q.



14) Observe a circunferência trigonométrica abaixo e calcule:



a) $\cos \frac{\pi}{2}$ e $\text{sen } \frac{\pi}{2}$

b) $\cos 2\pi$ e $\text{sen } 2\pi$

15) Determine o seno e o cosseno de 240°.

16) Determine o que se pede:

a) $sen\ 120°$

b) cos 120°

c) $sen\ 210°$

d) $cos\ 210°$

e) $tg\ 300°$

f) $sen\ 300°$

17) Resolva as equações, sendo $0° \leq x \leq 360°$.

a) $sen\ x = -1$

b) $sen\ x = 0$

c) tg $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $sen\ x = \frac{1}{2}$

18) Resolva as equações, sendo $0 \leq x \leq 2\pi$.

a) cos $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $tg\ x = \sqrt{3}$

c) $cos\ x = \frac{1}{2}$

4.5 – INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

4.5.1 - INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICA DO SENO E DO COSSENO

Inequações do tipo sen $x < k$ ou cos $x < k$ (ou com as relações $\leq$, $>$, $\geq$ ou $\neq$), sendo k uma constante real, são chamadas de **inequações trigonométricas imediatas**.

Resolução de uma inequação trigonométrica imediata

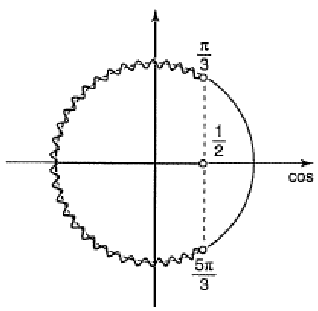
Resolver, em um universo U, uma inequação trigonométrica significa obter o conjunto solução S formado por todos os valores pertencentes a U que, atribuídos à variável da inequação, tornam verdadeira a sentença assim obtida. Resolveremos as inequações trigonométricas imediatas pelo método gráfico, conforme mostram os exercícios resolvidos a seguir.

EXEMPLOS

1- Resolver a inequação $\cos x < \frac{1}{2}$,
a) para $0 \leq x < 2\pi$.
b) em $\mathbb{R}$.

Resolução

a) Esquematizamos:



Considerando a 1ª volta positiva, os pontos da circunferência trigonométrica que têm cosseno menor que $\frac{1}{2}$ são aqueles associados às medidas entre $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$.

Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$

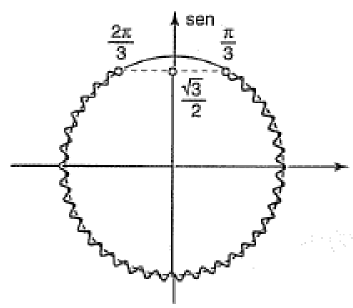
b) Para obter uma expressão que represente as soluções da inequação nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica, basta adicionar a cada extremo do intervalo obtido no item anterior a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, o conjunto solução S da inequação é dado por:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2 - Resolver a inequação sen $x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ para $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução

Devemos encontrar os pontos da circunferência trigonométrica que têm ordenada menor que $\frac{\sqrt{3}}{2}$ considerando apenas a 1ª volta positiva. Esses pontos são:



A maior dificuldade dessa resolução é a maneira de escrever a resposta. Para entender o porquê da forma da resposta, vamos "esticar" (retificar) a circunferência:

Assim, percebemos que o conjunto solução é a reunião de dois intervalos:

$$\left[0, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, 2\pi\right[$$

Logo:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$$

EXERCÍCIOS

40. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi\right\}$

1 - Resolva as seguintes inequações, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

a) $\operatorname{sen} x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\operatorname{sen} x \leqslant -\frac{1}{2}$ c) $\cos x \geqslant 0$

2 - Resolva, para $0 \leqslant x < 2\pi$, o sistema de inequações: $\begin{cases} \operatorname{sen} x > \frac{1}{2} \\ \cos x \leqslant 0 \end{cases}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} \leq x < \frac{5\pi}{6}\right\}$

3 - Resolver as inequações a seguir no universo $\mathbb{R}$:

a) $\operatorname{sen} x < \frac{1}{2}$ b) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

42. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid k \cdot 2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$ ou $\frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi \leq x \leq k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}\}$

4.5.2 - EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DA TANGENTE

Inequações do tipo tg $x > k$ (ou com as relações $\leqslant$, $<$, $\geqslant$ ou $\neq$), sendo k uma constante real, são chamadas de **inequações trigonométricas imediatas**.

Para resolvê-las, usaremos o método gráfico, como mostram os exercícios resolvidos a seguir.

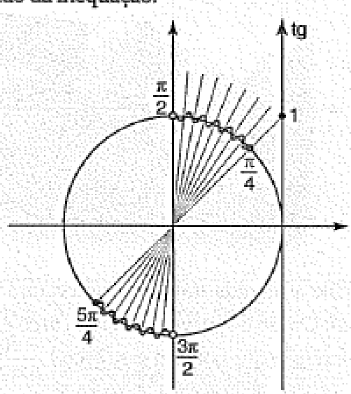
EXEMPLOS

1 - **Resolver a inequação tg $x \geqslant 1$,**

a) para $0 \leqslant x < 2\pi$. b) em $\mathbb{R}$.

Resolução

a) Em um esquema, determinamos os arcos trigonométricos que têm tangente igual a 1. A seguir, consideramos todas as retas que passam pelo centro da circunferência e pelos pontos de ordenada maior ou igual a 1 no eixo das tangentes. As medidas associadas aos pontos de intersecção dessas retas com a circunferência trigonométrica formam o conjunto solução da inequação.



Considerando apenas a 1ª volta positiva, temos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \leqslant x < \frac{3\pi}{2}\right\}$$

b) Para obter as expressões que representam as soluções da inequação, nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica, basta adicionar $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo dos intervalos obtidos no item a, obtendo:

$$\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ ou}$$

$$\frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

Notando, porém, que os arcos determinados por essas expressões na circunferência trigonométrica são simétricos em relação à origem do sistema, podemos substituí-las por uma única expressão:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Assim, uma das formas de apresentar o conjunto solução S da inequação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

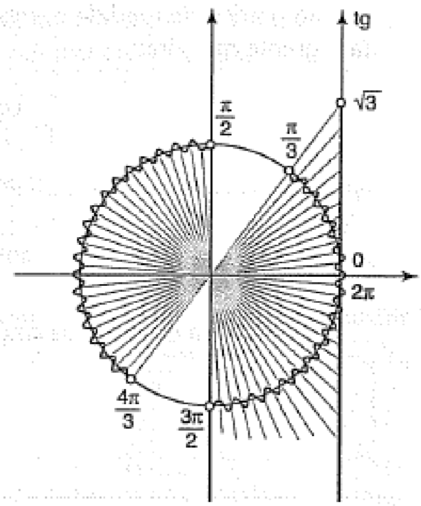
2 - **Resolver a inequação $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$ para $0 \leq x < 2\pi$.**

Resolução

Analogamente ao exercício anterior, construímos o esquema ao lado.

Considerando apenas a 1ª volta positiva, temos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$$



EXERCÍCIOS

1 - Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações para $0 \leq x < 2\pi$:

a) $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$

b) $\operatorname{tg} x < 1$

c) $\operatorname{tg} x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$

20. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \leq x < \frac{3\pi}{2}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < \frac{11\pi}{6}\right\}$

2 - Resolva em $\mathbb{R}$ as equações dos itens **a** e **b** do exercício anterior.

21. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Do topo B de um farol vertical $\overline{AB}$ de 60 m de altura, um barco C é avistado sob um ângulo de medida x, em grau, em relação à vertical.

a) Esboce um esquema que represente essa situação. *Ver Suplemento com orientações para o professor.*

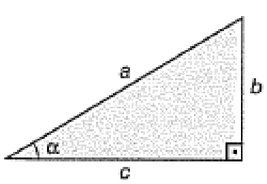
b) Admitindo que a reta $\overleftrightarrow{AC}$ seja horizontal, determine as possíveis medidas x para que a distância entre o barco e o ponto A seja maior que $20\sqrt{3}$ m. $30° < x < 90°$

3 - Resolva o sistema de inequações, para $0 \leq x < 2\pi$: $\begin{cases} \operatorname{tg} x > \sqrt{3} \\ \operatorname{sen} x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$

5 – SECANTE, COSSECANTE E COTANGENTE

No triângulo retângulo, estudamos três razões trigonométricas: o seno, o cosseno e a tangente, que revisamos a seguir.



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{b}{c}$$

As recíprocas (inversas) dessas razões também são chamadas de razões trigonométricas e recebem nomes especiais: a recíproca do seno é chamada de **cossecante** (cossec), a do cosseno é chamada de **secante** (sec) e a da tangente é chamada de **cotangente** (cotg), ou seja:

$$\text{cossec}\ \alpha = \frac{\text{medida da hipotenusa}}{\text{medida do cateto oposto a } \alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\sec\ \alpha = \frac{\text{medida da hipotenusa}}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{a}{c}$$

$$\text{cotg}\ \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida do cateto oposto a } \alpha} = \frac{c}{b}$$

Generalizando, podemos definir as razões recíprocas do seno, cosseno e tangente de um arco trigonométrico de medida α, desde que seja obedecida a condição de existência de cada razão, da seguinte maneira:

$$\text{cotg}\ \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen}\ \alpha}, \text{ para sen } \alpha \neq 0$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \text{ para } \cos \alpha \neq 0$$

$$\text{cossec}\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha}, \text{ para sen } \alpha \neq 0$$

Observe, pela definição de cotg α, que, se além de sen $\alpha \neq 0$ tivermos também cos $\alpha \neq 0$, então:

$$\text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha}$$

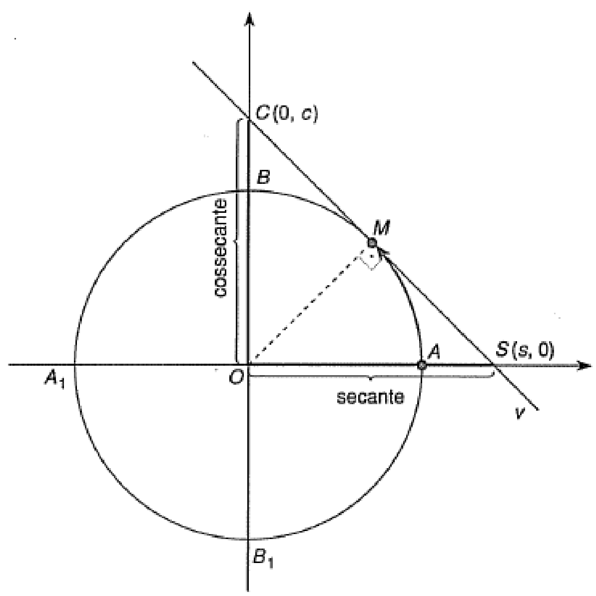
Observe no ciclo trigonométrico ao lado a representação geométrica dessas duas razões.

Traçando uma reta v tangente à circunferência pelo ponto M (extremidade do arco $\widehat{AM}$), determinamos o ponto S, intersecção da reta v com o eixo das abscissas e o ponto C, intersecção da reta v com o eixo das ordenadas.

A secante do arco $\widehat{AM}$ é a abscissa s do ponto S e a cossecante do arco $\widehat{AM}$ é a ordenada c do ponto C.

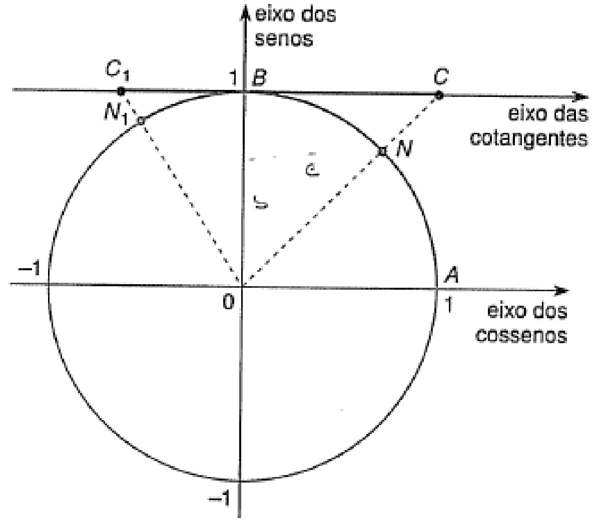
Note também que:

- para arcos com extremidades em B e B_1, a secante não existe, pois são arcos que têm cosseno igual a zero;
- para arcos com extremidades em A e A_1, a cossecante não existe, pois são arcos que têm seno igual a zero.



A representação geométrica do **eixo das cotangentes** é um eixo paralelo ao eixo dos cossenos e que passa pelo ponto $B(0, 1)$. Esse eixo contém todos os valores (quando existem) das cotangentes dos arcos do ciclo.

Observando o ciclo trigonométrico ao lado, vemos que a cotangente do arco $\widehat{AN}$ é positiva, pois o ponto C está à direita do eixo das ordenadas e a tangente do arco $\widehat{AN_1}$ é negativa, pois o ponto C_1 está à esquerda do eixo das ordenadas.



EXERCÍCIOS

1) Calcule estas expressões.

a) $tg\ \frac{5\pi}{4} - cotg\ \frac{5\pi}{2}$

b) $tg\ \frac{2\pi}{3} + cotg\ \frac{8\pi}{3} - sen\ \frac{5\pi}{4} - cos\ \frac{7\pi}{2}$

2) Determine o valor destas expressões.

a) $5 \cdot cos\ 150° - \frac{1}{2}\ tg\ 30° + \frac{3}{4}\ sen\ 330°$

b) $tg\ \frac{2\pi}{3} - cotg\ \frac{\pi}{2} + sen\ \frac{7\pi}{6} + cos\ \frac{8\pi}{3}$

3 - Calcule estas expressões.

a) $sec\ \frac{3\pi}{4} - cossec\ \frac{\pi}{6}$ $(-\sqrt{2} - 2$

b) $\left(sec\ \frac{\pi}{6} + cos\ \frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(sen\ \frac{2\pi}{3} - cossec\ \frac{2\pi}{3}\right)$

4 - Determine o valor destas expressões.

a) $\left(sen\ \frac{5\pi}{3} - tg\ \frac{5\pi}{3} + sec\ \frac{5\pi}{3}\right) - \left(cos\ \frac{7\pi}{6} - cotg\ \frac{7\pi}{6} + cossec\ \frac{7\pi}{6}\right)$

b) $\left(tg\ \frac{\pi}{6} - cotg\ \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \left(sec\ \frac{\pi}{4} + cossec\ \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \left(sen\ \frac{5\pi}{6} - cos\ \frac{\pi}{3}\right)$

5 - Construa um ciclo trigonométrico e determine a secante e a cossecante da 1ª determinação positiva do arco de $\frac{29\pi}{3}$.

6 – SENO, COSSENO E TANGENTE DA SOMA DE ARCOS

Neste capítulo vamos estudar importantes identidades trigonométricas que envolvem adição de arcos. Para entender a necessidade dessas identidades, analise a sentença:

$$sen\ (a + b) = sen\ a + sen\ b$$

Ela é verdadeira para quaisquer valores reais atribuídos às variáveis a e b?

Vejamos o que acontece, por exemplo, ao atribuirmos às variáveis a e b os valores π e $\frac{\pi}{2}$, respectivamente:

$$\text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\ \pi + \text{sen}\ \frac{\pi}{2} = 0 + 1$$

$$\therefore\ \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 \qquad \textbf{(Falso!)}$$

Essa igualdade é falsa, pois $\text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\ \frac{3\pi}{2} = -1$. Concluímos, então, que a sentença $\text{sen}\ (a + b) = \text{sen}\ a + \text{sen}\ b$ não é verdadeira para quaisquer números reais a e b.

Conclusões análogas são obtidas para o cosseno e a tangente.

A seguir apresentamos seis identidades, chamadas de **fórmulas de adição de arcos**, que nos auxiliarão em cálculos do seno, cosseno ou tangente da soma ou diferença de arcos trigonométricos.

(I) $\text{sen}\ (a + b) = \text{sen}\ a \cdot \cos b + \text{sen}\ b \cdot \cos a$

(II) $\text{sen}\ (a - b) = \text{sen}\ a \cdot \cos b - \text{sen}\ b \cdot \cos a$

(III) $\cos\ (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b$

(IV) $\cos\ (a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b$

(V) $\text{tg}\ (a + b) = \dfrac{\text{tg}\ a + \text{tg}\ b}{1 - \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ b}$

(VI) $\text{tg}\ (a - b) = \dfrac{\text{tg}\ a - \text{tg}\ b}{1 + \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ b}$

EXEMPLOS

1 - **Calcular sen 75°.**

Resolução

O arco de 75° é a soma dos arcos notáveis de 45° e 30°. Assim, temos:

$$\text{sen}\ 75° = \text{sen}\ (45° + 30°) = \text{sen}\ 45° \cdot \cos 30° + \text{sen}\ 30° \cdot \cos 45° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

2 - **Calcular cos 15°.**

Resolução

O arco de 15° é a diferença entre os arcos notáveis de 45° e 30°. Então:

$$\cos 15° = \cos (45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + \text{sen}\ 45° \cdot \text{sen}\ 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

(*Nota*: poderíamos escrever 15° como a diferença entre 60° e 45°.)

3 - **Resolver, para $0 \leq x < 2\pi$, a equação $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \sqrt{3}$.**

Resolução

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\sqrt{3}\Rightarrow$$

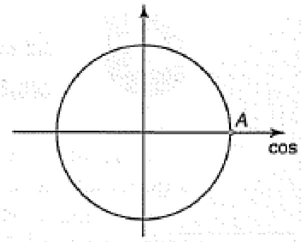
$$\Rightarrow \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\cdot\cos x+\text{sen}\,x\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos x-\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\cdot\text{sen}\,x=\sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x+\frac{1}{2}\cdot\text{sen}\,x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x-\frac{1}{2}\cdot\text{sen}\,x=\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x=\sqrt{3}$$

$$\therefore \cos x = 1$$

Logo: $S=\{0\}$



4 - **Calcular tg 105°.**

Resolução

O arco de 105° é a soma dos arcos notáveis de 60° e 45°. Assim, temos:

$$\text{tg}\,105^\circ=\text{tg}\,(60^\circ+45^\circ)=\frac{\text{tg}\,60^\circ+\text{tg}\,45^\circ}{1-\text{tg}\,60^\circ\cdot\text{tg}\,45^\circ}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$

Racionalizando o denominador, concluímos:

$$\text{tg}\,105^\circ=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3}$$

EXERCÍCIOS

1 Calcule:

a) $\cos 75^\circ$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $\text{sen}\,15^\circ$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

c) $\text{tg}\,\frac{5\pi}{12}$ $2+\sqrt{3}$

2 Aplicando as fórmulas de adição de arcos, determine os valores de *a*, *b*, *c* e *d* na tabela:

	20°	40°	45°	65°
sen	0,3	*a*	0,7	*c*
cos	0,9	*b*	0,7	*d*

(*Nota:* Os valores apresentados nessa tabela são aproximados.) $a = 0{,}54$; $b = 0{,}72$; $c = 0{,}84$; $d = 0{,}42$

3 Aplicando as fórmulas de adição de arcos, determine os valores de *a*, *b* e *c* na tabela:

	13°	22°	35°	57°	70°
tg	*a*	0,4	0,7	*b*	*c*

(*Nota:* Os valores apresentados nessa tabela são aproximados.) $a = 0{,}23$; $b = 1{,}53$; $c = 2{,}72$

4 Sabendo que $\text{tg}\,x = 3$, calcule $\text{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. $\frac{1}{2}$

5 Sabendo que $\text{sen}\,a=\frac{3}{5}$ e que $0 < a < \frac{\pi}{2}$, calcule $\cos\left(\frac{\pi}{3}+a\right)$. $\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$

6 (UFPR) A expressão $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$ é equivalente a: alternativa e

a) $2\cos x$

b) $\cos x$

c) $\text{sen}\,x+\cos x$

d) $\text{sen}\,x-\cos x$

e) $\cos x-\text{sen}\,x$

7 Resolva a equação:

$$\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

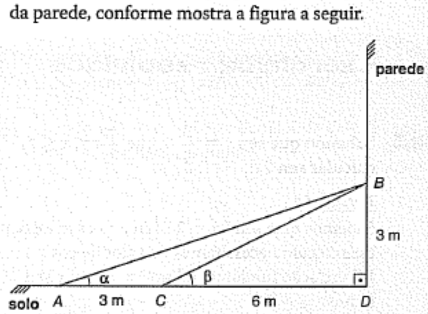
a) para $0 \leq x < 2\pi$. $S=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right\}$

b) em $\mathbb{R}$. $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \text{ ou } x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,\text{ com } k\in\mathbb{Z}\right\}$

8 Calcule, para $x=\frac{\pi}{8}$, o valor da expressão:

$E=\text{sen}\,3x\cdot\cos x-\text{sen}\,x\cdot\cos 3x$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

9 Duas vigas retas, *AB* e *CB*, escoram uma parede vertical, de modo que os pontos *A* e *C* do solo estão em uma reta horizontal que passa por um ponto *D* da parede, conforme mostra a figura a seguir.



Calcule a soma das medidas α e β, em grau, dos ângulos agudos que as vigas formam com o solo.
[*Sugestão*: Inicie calculando tg (α + β)] $\alpha+\beta=45^\circ$

6 – SENO, COSSENO E TANGENTE DA SOMA DO ARCO DUPLO

Observe os arcos de medidas x e $2x$ na circunferência trigonométrica ao lado.

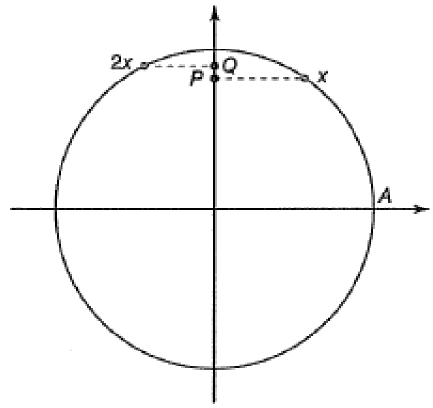
A ordenada do ponto P é o sen x, e a ordenada do ponto Q é o sen $2x$.

Você acha que, para qualquer valor de x, o sen $2x$ é o dobro do sen x, ou seja, sen $2x = 2 \cdot$ sen x?

Facilmente se percebe que não, pela figura.

Aliás, para um valor conveniente de x, o sen $2x$ pode ser até igual a sen x. Por exemplo, se fizermos $x = 60°$, então $2x = 120°$, e teremos: sen $120° =$ sen $60°$, ou seja, sen $2x =$ sen x, para $x = 60°$.

Conclusões análogas são obtidas para o cosseno e para a tangente.



Vamos estudar três identidades, em IR, conhecidas como **fórmulas de arco duplo**, que nos auxiliarão nos cálculos de sen $2x$, cos $2x$ e tg $2x$.

São elas:

$$\textbf{(I)}\ \text{sen}\ 2x = 2 \cdot \text{sen}\ x \cdot \cos x$$
$$\textbf{(II)}\ \cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2\ x$$
$$\textbf{(III)}\ \text{tg}\ 2x = \frac{2\,\text{tg}\ x}{1 - \text{tg}^2\ x}$$

Demonstrações

Substituindo $2x$ por $x + x$ e aplicando as fórmulas de adição de arcos, temos:

$$\textbf{(I)}\ \text{sen}\ 2x = \text{sen}\ (x + x) = \text{sen}\ x \cdot \cos x + \text{sen}\ x \cdot \cos x = 2\text{sen}\ x \cdot \cos x$$
$$\textbf{(II)}\ \cos 2x = \cos (x + x) = \cos x \cdot \cos x - \text{sen}\ x \cdot \text{sen}\ x = \cos^2 x - \text{sen}^2\ x$$
$$\textbf{(III)}\ \text{tg}\ 2x = \text{tg}\ (x + x) = \frac{\text{tg}\ x + \text{tg}\ x}{1 - \text{tg}\ x \cdot \text{tg}\ x} = \frac{2\,\text{tg}\ x}{1 - \text{tg}^2\ x}$$

1 - **Sabendo que sen $x = \frac{3}{5}$ e que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcular sen $2x$.**

Resolução

Sabemos que: sen $2x = 2 \cdot$ sen $x \cdot \cos x$; logo, para esse cálculo necessitamos do valor de cos x.

Pela relação fundamental $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, temos:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \cos x = \pm\frac{4}{5}$$

Como x é um arco do 2º quadrante, temos:

$$\cos x = -\frac{4}{5}$$

Assim:

$$\text{sen}\ 2x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$\therefore \text{sen}\ 2x = -\frac{24}{25}$$

2 - **Sabendo que cos $x = \frac{1}{3}$, calcular cos $2x$.**

Resolução

Sabemos que: $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

Substituindo $\text{sen}^2 x$ por $(1 - \cos^2 x)$, temos:

$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cdot \cos^2 x - 1$

Assim:

$$\cos 2x = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1$$

$$\therefore \cos 2x = -\frac{7}{9}$$

3 - **Resolver, para $0 \leqslant x < 2\pi$, a equação $\text{sen } 2x = 2\text{sen } x$.**

Resolução

Substituímos sen $2x$ por $2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$, obtendo:

$2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = 2 \cdot \text{sen } x \Rightarrow$

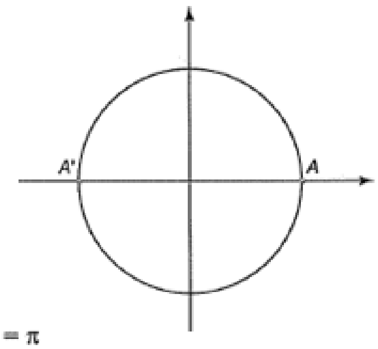
$\Rightarrow \text{sen } x \cdot \cos x = \text{sen } x$

$\therefore \text{sen } x \cdot \cos x - \text{sen } x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } x\,(\cos x - 1) = 0$

Temos:

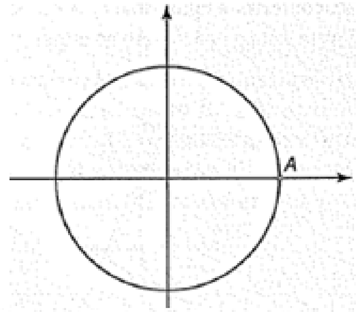
- $\text{sen } x = 0$



Portanto:

$x = 0$ ou $x = \pi$

- $\cos x = 1$



Portanto:

$x = 0$

Logo: $S = \{0, \pi\}$

4 - **Sendo $\text{tg } x = 5$, calcule $\text{tg } 2x$.**

Resolução

$$\text{tg } 2x = \frac{2 \cdot \text{tg } x}{1 - \text{tg}^2\, x} = \frac{2 \cdot 5}{1 - 5^2} = -\frac{10}{24}$$

Portanto: $\text{tg } 2x = -\dfrac{5}{12}$

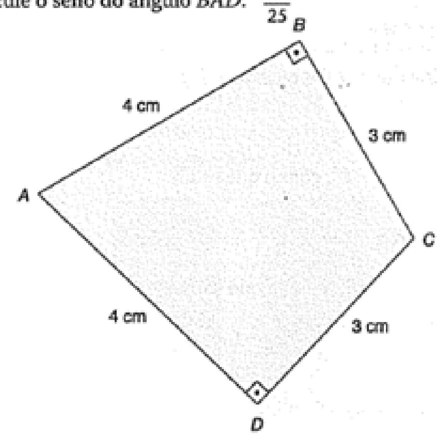
4. a) $S = \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}\}$

1. Sabendo que $\text{sen } x = -\dfrac{5}{13}$ e que $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, calcule sen $2x$ e cos $2x$. $\text{sen } 2x = \dfrac{120}{169}$; $\cos 2x = \dfrac{119}{169}$

Dado $\text{tg } x = 3$, calcule $\text{tg } 2x$. $-\dfrac{3}{4}$

No quadrilátero *ABCD*, representado abaixo, calcule o seno do ângulo $B\hat{A}D$. $\dfrac{24}{25}$



2. Calcule o valor do $\cos x$, sabendo que $\cos \dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{5}$. $-\dfrac{7}{25}$

(*Sugestão*: $\cos x = \cos\left(2 \cdot \dfrac{x}{2}\right)$

3. Sabendo que $\cos x = \dfrac{3}{4}$ e que $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, calcule $\cos \dfrac{x}{2}$. $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

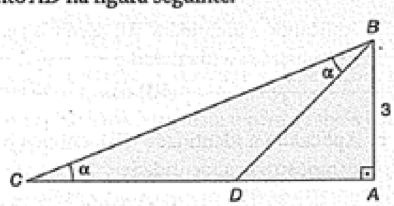
4. Resolva a equação $\text{sen } 2x = \cos x$,

a) para $0 \leqslant x < 2\pi$.

b) em $\mathbb{R}$.

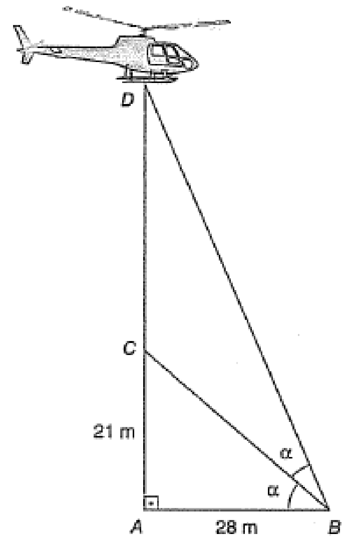
5. (Cesgranrio-RJ) Resolva a equação: $\cos 2x - \cos x = -1$, para $0 \leqslant x < 2\pi$ $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{3}\right.$

6. Sabendo que $\text{tg } \alpha = 0{,}4$, calcule a medida do segmento $\overline{AD}$ na figura seguinte:

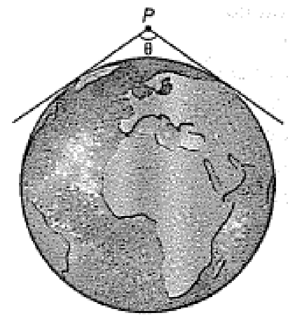


(*Sugestão*: Use o teorema do ângulo externo de um triângulo.) 3,15

7. Um helicóptero, que decola verticalmente a partir de um ponto *A* de uma pista plana e horizontal, é observado de um ponto *B* da pista, localizado a 28 m de *A*. Ao subir 21 m, até um ponto *C*, o helicóptero é visto sob um ângulo de medida α com a pista; e, quando atinge um ponto D, é visto sob um ângulo de medida 2α, conforme a figura abaixo. A que altura, em relação à pista, está o helicóptero ao atingir o ponto D? 96 m



8. De um ponto P do espaço, um astronauta vê a Terra sob um ângulo de medida θ, conforme a figura:



Admitindo-se que o raio da Terra meça 6.400 km e que $\cos\theta = -0,62$, conclui-se que o ponto P está, em relação à superfície da Terra, a uma altura de aproximadamente: alternativa e

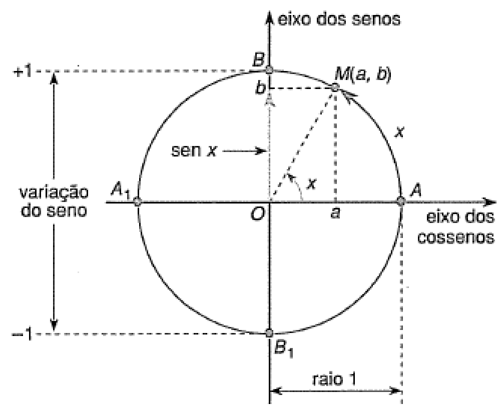
a) 300 km
b) 530 km
c) 580 km
d) 623 km
e) 711 km

6 – FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

6.1 – FUNÇÃO SENO

A função que associa a cada x real (medida do arco $\widehat{AM}$ do ciclo trigonométrico) o valor de seno de x é chamada de **função seno** e definida por:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{sen } x$



A tabela abaixo mostra alguns valores da função seno.

Medida x do arco em radianos	Ponto em que a extremidade do arco está	Ordenada do ponto	Valor de sen x
0	$A(1, 0)$	0	$\text{sen } 0 = 0$
$\frac{\pi}{2}$	$B(0, 1)$	1	$\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$
π	$A_1(-1, 0)$	0	$\text{sen } \pi = 0$
$\frac{3\pi}{2}$	$B_1(0, -1)$	-1	$\text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1$
2π	$A(1, 0)$	0	$\text{sen } 2\pi = 0$

- **Domínio e conjunto imagem da função $y = \text{sen } x$**

O domínio da função $f(x) = \text{sen } x$ é $D(f) = \mathbb{R}$.

Observando os valores do sen x no ciclo trigonométrico, notamos que o conjunto imagem da função seno é $\text{Im}(f) = [-1, 1] = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\}$.

- **Periodicidade e sinal da função seno**

Dizemos que uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica se, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tivermos:

$$f(x + p) = f(x), \text{ com } p \in \mathbb{R}$$

> O menor valor positivo de p de modo que se tenha $f(x + p) = f(x)$, com $p \in \mathbb{R}$, é chamado de **período** da função f.

Assim sendo, como todos os valores do seno encontrados na primeira volta no ciclo se repetem nas voltas subseqüentes, então, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ temos que:

$$\text{sen } (x + \underset{\uparrow}{k} \cdot 2\pi) = \text{sen } x$$

***k* é o número de voltas**

O menor valor positivo de $k \cdot 2\pi$ de modo que se tenha $\text{sen } (x + k \cdot 2\pi) = \text{sen } x$ é $k = 1$. Trocando k por 1, encontramos:

$$\text{sen } (x + 1 \cdot 2\pi) = \text{sen } x \Rightarrow \text{sen } (x + \overbrace{2\pi}^{\text{Período}}) = \text{sen } x$$

Dessa forma concluímos que:

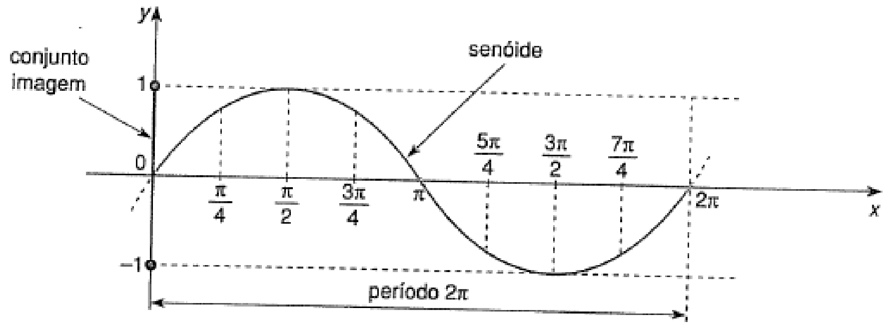
> A função $y = \text{sen } x$ é periódica e tem período 2π.

6.1.2 – GRÁFICO DA FUNÇÃO SENO

Observando o comportamento da ordenada de um ponto P que se move sobre o ciclo no sentido anti-horário dando uma volta completa, construímos a tabela abaixo, indicando os intervalos onde a função seno é crescente e onde ela é decrescente.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sen x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
	Crescente			Decrescente				Crescente	

Fizemos x variar de 0 a 2π, levando em conta que a função é periódica de período 2π. Veja abaixo o gráfico da função $y = \text{sen } x$, que é chamado de **senóide**.



Observando o gráfico, podemos perceber que $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [-1, 1]$. No intervalo $[0, 2\pi]$, temos que:

- a função é positiva em $]0, \pi[$ e negativa em $]\pi, 2\pi[$;
- a função é crescente nos intervalos $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$;
- a função é decrescente no intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$;
- o valor máximo da função ocorre para $x = \frac{\pi}{2}$ e o valor mínimo ocorre para $x = \frac{3\pi}{2}$.

EXEMPLO DE CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO DA FUNÇÃO SENO

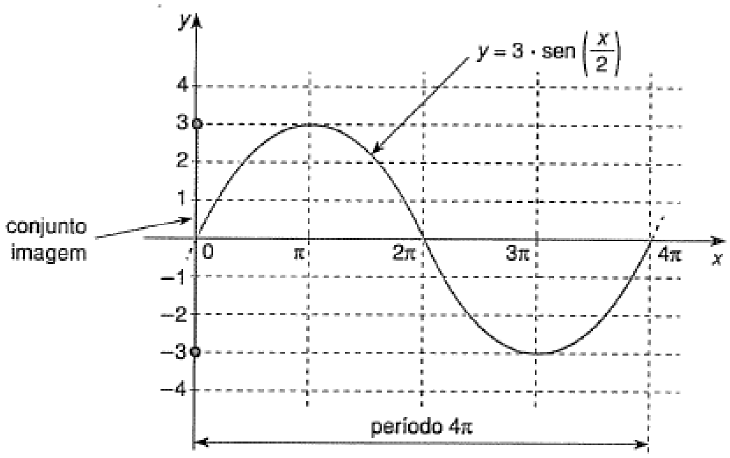
$y = 3 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

Como o arco mede $\frac{x}{2}$ rad, vamos fazer $\frac{x}{2}$ variar desde 0 até 2π.

Veja na tabela a seguir as colunas auxiliares colocadas. Os dados que serão utilizados na construção do gráfico são os das duas últimas colunas.

$\frac{x}{2}$ rad	$\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$	x rad	$y = 3 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$
0	0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	π	3
π	0	2π	0
$\frac{3\pi}{2}$	−1	3π	−3
2π	0	4π	0

Veja o gráfico:



Temos: $D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = [-3, 3]$, período $= 4\pi$ rad

Comparando o gráfico da função $y = 3 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ com o da função $y = \text{sen}\, x$, vemos que o fator 3 que aparece na função dada puxou a curva para cima e para baixo. Já o fator $\frac{1}{2}$ — que apareceu, multiplicando o arco — alterou o período de 2π rad para 4π rad.

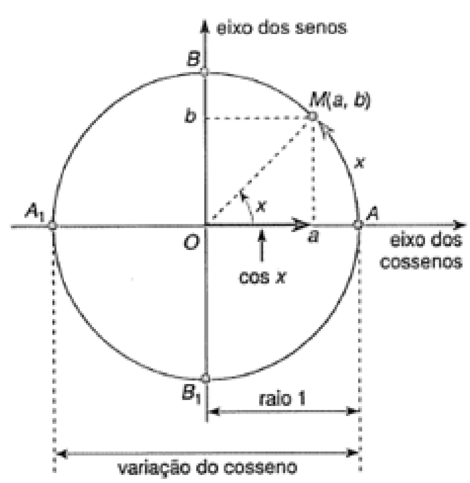
De modo geral, para uma função $y = \text{sen}\,(kx)$, com $k \neq 0$, o período é dado por $\frac{2\pi}{|k|}$ rad.

Conferindo isso, no nosso caso, temos $k = \frac{1}{2}$. Portanto, o período é $\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}$ rad $= 4\pi$ rad, conforme mostra o gráfico acima.

6.2 – FUNÇÃO COSSENO

A função que associa a cada x real (me arco $\widehat{AM}$ do ciclo trigonométrico) o v cosseno de x é chamada de **função coss** definida por:

$$f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = \cos x$$



A tabela abaixo mostra alguns valores da função cosseno.

Medida x do arco em radianos	Ponto em que a extremidade do arco está	Abscissa do ponto	Valor de $\cos x$
0	$A(1, 0)$	1	$\cos 0 = 1$
$\frac{\pi}{2}$	$B(0, 1)$	0	$\cos \frac{\pi}{2} = 0$
π	$A_1(-1, 0)$	-1	$\cos \pi = -1$
$\frac{3\pi}{2}$	$B_1(0, -1)$	0	$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$
2π	$A(1, 0)$	1	$\cos 2\pi = 1$

- **Domínio e conjunto imagem da função cosseno**

O domínio da função $f(x) = \cos x$ é $D(f) = \mathbb{R}$. Observando os valores do $\cos x$ no ciclo trigonométrico, notamos que o conjunto imagem da função é:
$\text{Im}(f) = [-1, 1] = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

- **Periodicidade e sinal da função cosseno**

Do mesmo modo que na função seno, na função cosseno temos $\cos x = \cos(x + k \cdot 2\pi), k \in \mathbb{Z}$ para $\forall x \in \mathbb{R}$. O menor valor positivo de $k \cdot 2\pi$ de modo que se tenha $\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x$ é $k = 1$.

Dessa forma concluímos que: A função $y = \cos x$ é periódica de período 2π.

6.2.1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO COSSENO

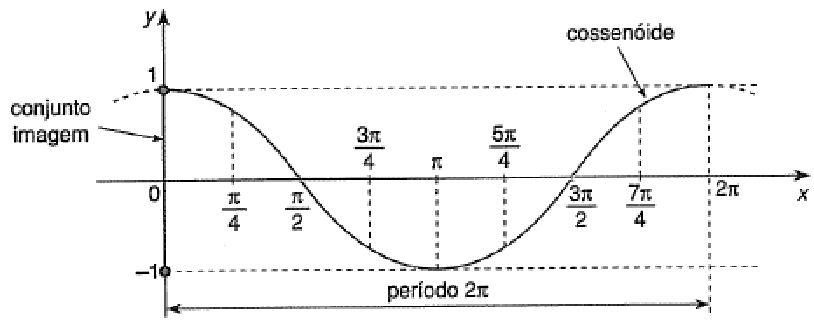
- **Gráfico da função $y = \cos x$**

Observando o comportamento da abscissa de um ponto P que se move sobre o ciclo no sentido anti-horário dando uma volta completa, construímos a tabela seguinte, indicando os intervalos onde a função cosseno é crescente e onde ela é decrescente.

x rad	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\textbf{Decrescente}}\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\textbf{Crescente}}$

Fizemos x variar de 0 a 2π, levando em conta que a função é periódica de período 2π. Veja abaixo o gráfico da função $y = \cos x$, que é chamado de **cossenóide**.



Observando o gráfico, podemos perceber que $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [-1, 1]$. No intervalo $[0, 2\pi]$, temos que:

- a função é positiva em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e em $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ e negativa em $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$;
- a função é crescente no intervalo $]\pi, 2\pi[$ e decrescente no intervalo $]0, \pi[$;
- o valor máximo da função ocorre para $x = 0$ e para $x = 2\pi$ e o valor mínimo ocorre para $x = \pi$.

EXEMPLO DE CONSTRUÇÃO DE GRÁFICO

Vamos ver alguns exemplos de como construir o gráfico e determinar o domínio, o conjunto imagem e o período das funções trigonométricas a seguir.

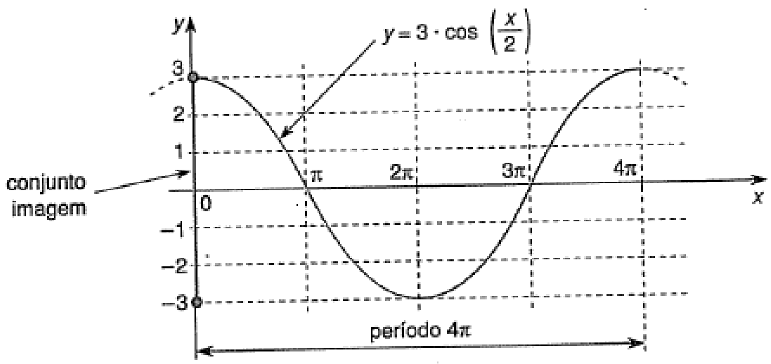
$y = 3 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Como o arco mede $\frac{x}{2}$ rad, vamos fazer $\frac{x}{2}$ variar desde 0 até 2π.

Veja na tabela abaixo as colunas auxiliares colocadas. Os dados que serão utilizados na construção do gráfico são os das duas últimas colunas.

$\frac{x}{2}$ **rad**	$\cos\left(\frac{x}{2}\right)$	x **rad**	$y = 3 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$
0	1	0	3
$\frac{\pi}{2}$	0	π	0
π	−1	2π	−3
$\frac{3\pi}{2}$	0	3π	0
2π	1	4π	3

Veja o gráfico:



Temos: $D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = [-3, 3]$, período $= 4\pi$ rad

Comparando o gráfico da função $y = 3 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ com o da função $y = \cos x$, vemos que o fator 3 que aparece na função dada puxou a curva para cima e para baixo. Já o fator $\frac{1}{2}$ — que apareceu multiplicando o arco — alterou o período, de 2π rad para 4π rad.

> De modo geral, para uma função $y = \cos(kx)$, com $k \neq 0$, o período é dado por $\frac{2\pi}{|k|}$ rad.

Confeındo isso, no nosso caso temos $k = \frac{1}{2}$. Portanto, o período é $\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}$ rad $= 4\pi$ rad, conforme mostrava a figura.

6.3 – FUNÇÃO TANGENTE

A função que associa a cada x real (medida do arco $\widehat{AM}$ do ciclo trigonométrico) o valor da tangente de x é chamada de **função tangente** e definida por:

> $f: R_1 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{tg } x$, em que
> $R_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

- **Domínio e conjunto imagem da função tangente**

  O domínio da função $y = \text{tg } x$ é $R_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

  O conjunto imagem da função $y = \text{tg } x$ é $\mathbb{R}$, ou seja, $Im(f) = \mathbb{R}$.

- **Periodicidade e sinal da função tangente**

Veja a figura ao lado. Nela, o ponto L_1 é simétrico de M com relação ao ponto O.

Notemos que, se $\widehat{AM}$ mede x, então $\widehat{AL_1}$ mede $x + \pi$. Mas, apesar de terem medidas diferentes, esses arcos possuem a mesma tangente, isto é, $\text{tg } x = \text{tg } (x + \pi)$.

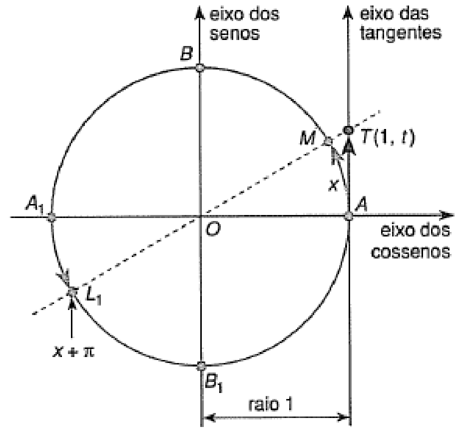
De modo geral, temos:

$\text{tg } x = \text{tg } (x + k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$

Portanto, o período é π rad.

De modo geral:

> Uma função do tipo $y = \text{tg } (kx)$, com $k \neq 0$, tem período $\dfrac{\pi}{|k|}$ rad.



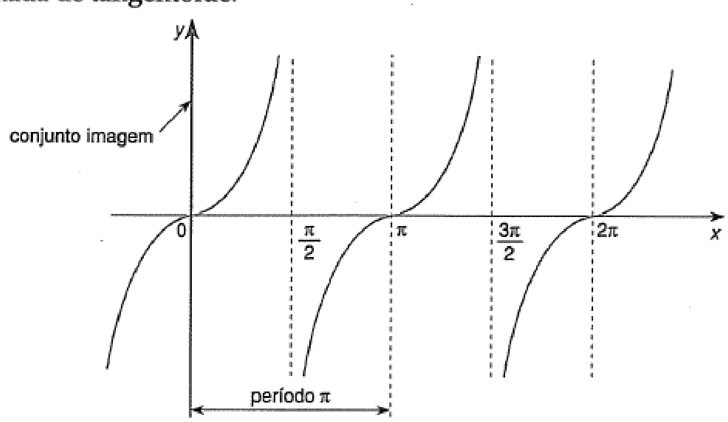
6.3.1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO TANGENTE

Mesmo sabendo que a função tangente é periódica de período π, faremos x variar desde 0 até 2π rad.

Nessa primeira volta do ciclo, existem dois valores que x não pode assumir: $x = \dfrac{\pi}{2}$ rad e $x = \dfrac{3\pi}{2}$ rad (ou seja, $x = 90°$ e $x = 270°$), pois nesses dois casos o eixo das tangentes fica paralelo ao eixo das ordenadas. Observe a tabela:

x rad	0	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	π	$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	2π
tg x	0	cresce de 0 para $+\infty$	não existe	cresce de $-\infty$ para 0	0	cresce de 0 para $+\infty$	não existe	cresce de $-\infty$ para 0	0

As informações contidas na tabela anterior permitem esboçar o gráfico da função $y = \text{tg } x$ chamada de **tangentóide**.



7 – RELAÇÕES ENTRE AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Ao estudarmos as razões trigonométricas num triângulo retângulo, vimos que, quando x representava a medida de um dos seus ângulos agudos, eram verdadeiras as seguintes afirmações: $\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1$ e $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$

É importante destacar aqui que a relação $\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1$ é verdadeira para qualquer valor real de x, não importando se o triângulo retângulo existe ou não e nem importando se x é positivo ou negativo.

Também a relação $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$ é verdadeira para qualquer valor real de x desde que $\cos x \neq 0$.

Outras relações importantes são as que associam $\sec^2 x$ com $\text{tg}^2\, x$ e as que associam $\text{cossec}^2\, x$ com $\text{cotg}^2\, x$. Exprimindo o valor de $\sec^2 x$ em função da $\text{tg}^2\, x$ e calculando $\text{cossec}^2\, x$, temos:

$$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen}^2\, x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen}^2\, x}{\cos^2 x} + \overset{1}{\cancel{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}} = \frac{\text{sen}^2\, x}{\cos^2 x} + 1 = \text{tg}^2\, x + 1$$

$$\text{cossec}^2\, x = \frac{1}{\text{sen}^2\, x} = \frac{\text{sen}^2\, x + \cos^2 x}{\text{sen}^2\, x} = \overset{1}{\cancel{\frac{\text{sen}^2\, x}{\text{sen}^2\, x}}} + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2\, x} = 1 + \text{cotg}^2\, x$$

Assim: $\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2\, x$ e $\text{cossec}^2\, x = 1 + \text{cotg}^2\, x$

Igualdades como essas, que são verdadeiras para quaisquer valores da variável para os quais as funções estão definidas, são chamadas de **identidades**.

No quadro a seguir, temos um resumo das identidades já vistas.

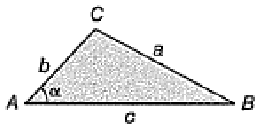
$\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1$	$\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$
$\text{cotg}\, x = \dfrac{1}{\text{tg}\, x}$	$\text{cotg}\, x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x}$
$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$	$\text{cossec}\, x = \dfrac{1}{\text{sen}\, x}$
$1 + \text{tg}^2\, x = \sec^2 x$	$1 + \text{cotg}^2\, x = \text{cossec}^2\, x$

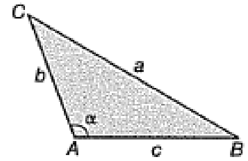
7 – RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS

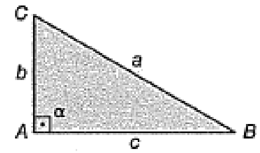
Embora as razões trigonométricas sejam definidas apenas em triângulos retângulos, é possível aplicá-las também na resolução de triângulos não retângulos. Os teoremas a seguir mostram como isso é feito.

7.1 – LEI DOS COSSENOS

Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo e α a medida do ângulo oposto ao lado de medida a.





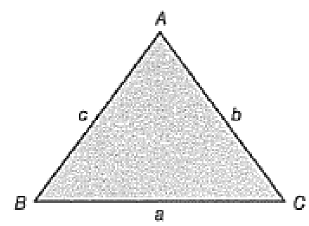


Nos três casos acima, vale a relação: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha}$

7.2 – LEI DOS SENOS

Sendo $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$ as medidas dos lados de um triângulo ABC, temos:

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \widehat{C}} = 2R}$$



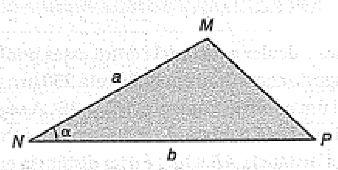
em que R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

7.3 – CÁLCULO DA ÁREA DE UM TRIÂNGULO

Já estudamos o cálculo da área de um triângulo como a metade do produto da medida da base pela medida da altura relativa a essa base. Neste item, o cálculo dessa área será feito em função das medidas de dois lados e da medida do ângulo determinado por eles. O teorema a seguir mostra como isso é feito.

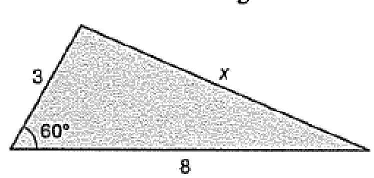
A área A de um triângulo MNP, em que $NM = a$, $NP = b$ e $m(M\hat{N}P) = \alpha$, é dada por:

$$A = \frac{1}{2} ab \cdot \text{sen } \alpha$$



EXERCÍCIOS - 1

1) **Determinar o valor de x na figura abaixo.**



Resolução

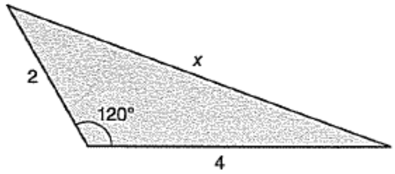
Pela lei dos cossenos:

$x^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 9 + 64 - 48 \cdot \frac{1}{2}$

$\therefore x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$

2) Determinar o valor de x na figura abaixo.



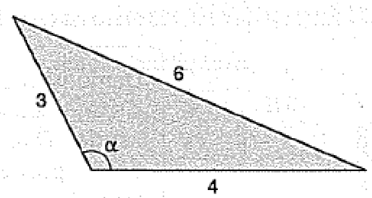
Resolução

Pela lei dos cossenos: $x^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cos 120°$

$\therefore x^2 = 4 + 16 - 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x^2 = 28$

Logo: $x = 2\sqrt{7}$

3) Determinar o valor do cos α na figura abaixo.



Resolução

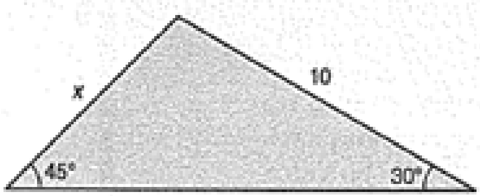
Pela lei dos cossenos:

$6^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 36 = 9 + 16 - 24\cos \alpha \Rightarrow 24\cos \alpha = -11$

Logo: $\cos \alpha = -\frac{11}{24}$

4) Determinar a medida x na figura:



Resolução

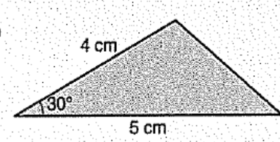
Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{x}{\text{sen } 30°} = \frac{10}{\text{sen } 45°} \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

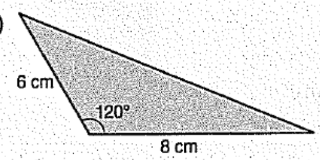
$\therefore x = 5\sqrt{2}$

5) Calcular a área de cada um dos triângulos:

a)



b)



Resolução

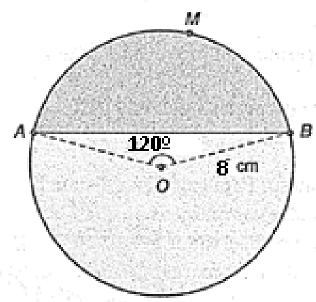
a) $A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \text{sen } 30° =$

$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow A = 5 \text{ cm}^2$

b) $A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \text{sen } 120° =$

$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$

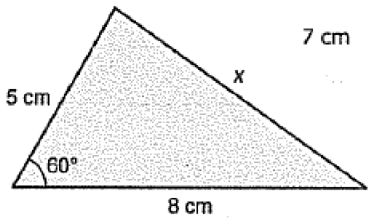
8) Toda corda de um círculo divide-o em duas partes chamadas de "segmentos circulares". Calcule a área do segmento circular azul-escuro no círculo de centro O, a seguir:



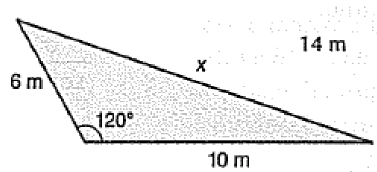
6) Para calcular a distância entre um ponto A de uma praia e uma ilhota B, um observador afastou-se 30 m de A, sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ até o ponto C, e depois caminhou 200m em linha reta até o ponto D, conforme mostra a figura. A seguir, mediu os ângulos $D\hat{C}B$ e $B\hat{D}C$ obtendo, respectivamente, 50º e 110º. Adotando-se a aproximação sen100º=0,98 , qual é a distância entre A e B?

EXERCÍCIOS – 2

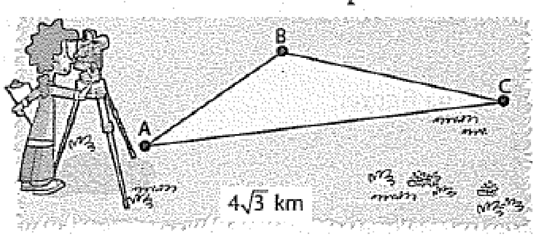
1) Calcule a medida x indicada nas figuras abaixo:



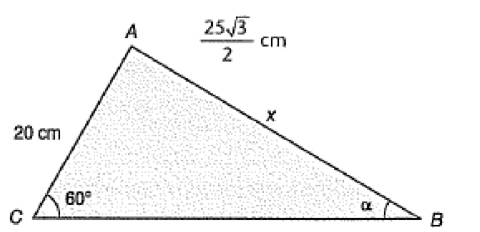
2) Calcule a medida x indicada nas figuras abaixo:



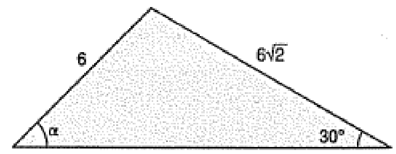
3) No mapeamento de uma região, uma topógrafa posicionou-se em um ponto A e visou um ponto B, a 4 km de A; a seguir visou um ponto C, a 8 km de A, tal que $m(C\hat{A}B) = 60°$. Calcule a distância entre os pontos B e C.



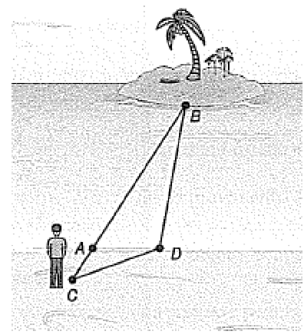
4) No triângulo ABC representado abaixo, são dados $AC = 20$ cm e $\cos \alpha = 0{,}6$. Calcule a medida x do lado $\overline{AB}$.



5) Determine a medida α do ângulo agudo no triângulo a seguir. 45°

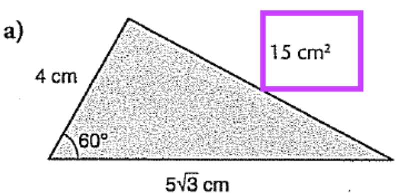


6) Para calcular a distância entre um ponto A de uma praia e uma ilhota B, um observador afastou-se 30 m de A, sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ até o ponto C, e depois caminhou 100 m em linha reta até o ponto D, conforme mostra a figura. A seguir, mediu os ângulos $D\hat{C}B$ e $B\hat{D}C$ obtendo, respectivamente, 40° e 110°. Adotando-se a aproximação $\text{sen } 110° = 0{,}94$, qual é a distância entre A e B? 158 m

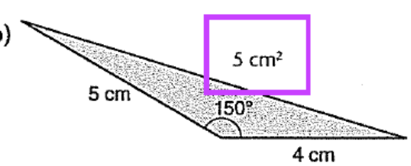


7) Calcule a área de cada um dos triângulos:

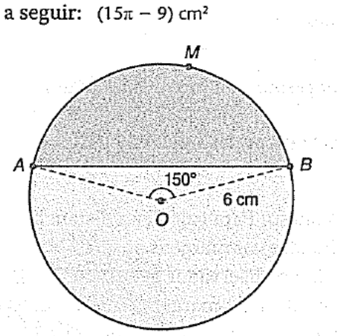
a)



b)



Toda corda de um círculo divide-o em duas partes chamadas de "segmentos circulares". Calcule a área do segmento circular azul-escuro no círculo de centro O, a seguir: $(15\pi - 9)$ cm²



1) Calcular o valor da expressão:

$$E = \frac{\text{sen}\,180° + \cos 180° - \text{sen}\,270°}{\text{sen}\,90° + \cos 360°}$$

2) Calcule o valor de cos α, sabendo que sen $\alpha = -\frac{1}{3}$ e que $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

3) Calcular:

a) cotg 30° b) sec 180° c) cossec 90°

Resolução

a) $\text{cotg}\,30° = \frac{\cos 30°}{\text{sen}\,30°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{3}$

b) $\sec 180° = \frac{1}{\cos 180°} = \frac{1}{-1} = -1$

c) $\text{cossec}\,90° = \frac{1}{\text{sen}\,90°} = \frac{1}{1} = 1$

4) Calcular sen 75°.

Resolução

O arco de 75° é a soma dos arcos notáveis de 45° e 30°. Assim, temos:

$\text{sen}\,75° = \text{sen}\,(45° + 30°) = \text{sen}\,45° \cdot \cos 30° + \text{sen}\,30° \cdot \cos 45° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

5)Calcular de 15°.

6) **Sabendo que sen $x = \frac{3}{5}$ e que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcular sen $2x$.**

Resolução

Sabemos que: sen $2x = 2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x$; logo, para esse cálculo necessitamos do valor de cos x.

Pela relação fundamental $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, temos:

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

$\therefore \cos x = \pm\frac{4}{5}$

Como x é um arco do 2º quadrante, temos:

$\cos x = -\frac{4}{5}$

7) **Sabendo que cos $x = \frac{1}{3}$, calcular cos $2x$.**

Resolução

Sabemos que: $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

Substituindo $\text{sen}^2 x$ por $(1 - \cos^2 x)$, temos:

$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cdot \cos^2 x - 1$

Assim:

$\cos 2x = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1$

$\therefore \cos 2x = -\frac{7}{9}$

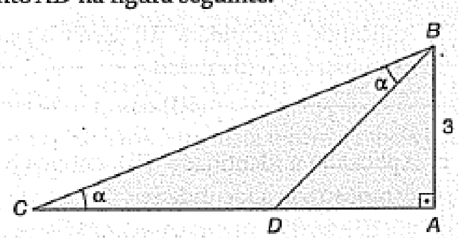
8) **Sendo tg $x = 5$, calcule tg $2x$.**

Resolução

$\text{tg}\,2x = \frac{2 \cdot \text{tg}\,x}{1 - \text{tg}^2\,x} = \frac{2 \cdot 5}{1 - 5^2} = -\frac{10}{24}$

Portanto: $\text{tg}\,2x = -\frac{5}{12}$

9) Sabendo que tg α = 0,4, calcule a medida do segmento $\overline{AD}$ na figura seguinte:



(*Sugestão*: Use o teorema do ângulo externo de um triângulo.) 3,15

1) Calcule o valor numérico da expressão:

$$E = \frac{\text{sen } x - \cos 2x + \cos 3x}{\text{sen } 3x - \cos x} \text{ para } x = 90°$$

Resp: -2

2) Dado que $\text{sen } \alpha = \frac{1}{3}$, com $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcular o valor de $\cos \alpha$.

3) Calcular:

$a)\ cotg\ 45°$, $b)\ sec\ 150°$, $c)\ cossec\ 270°$

4) Calcule $\cos 75°$.

5) Calcule $sen\ 15°$.

6) Sabendo que $\text{sen } x = -\frac{5}{13}$ e que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule sen $2x$ e cos $2x$.

Resp: $\text{sen } 2x = \frac{120}{169}$; $\cos 2x = \frac{119}{169}$

7) Dado $\text{tg } x = 3$, calcule tg $2x$.

Resp: $-\frac{3}{4}$

8) Um helicóptero, que decola verticalmente a partir de um ponto A de uma pista plana e horizontal, é observado de um ponto B da pista, localizado a 28 m de A. Ao subir 21 m, até um ponto C, o helicóptero é visto sob um ângulo de medida α com a pista; e, quando atinge um ponto D, é visto sob um ângulo de medida 2α, conforme a figura abaixo. A que altura, em relação à pista, está o helicóptero ao atingir o ponto D?